Kapitola 1

DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

1.1 Metrické prostory

DEFINICE 1.1.1

Nechť $n \in \mathbb{N}$. **Uspořádanou** n**−ticí reálných čísel** $(x_1, \dots, x_n)$ nazýváme uspořádaný soubor n−reálných čísel $x_1, \dots, x_n$ kde index i čísla $x_i, i = 1, \dots, n$, znamená, že číslo x_i je v daném souboru na i−tém místě. Množinu všech uspořádaných n–tic reálných čísel $(x_1, \dots, x_n)$ nazýváme **n-rozměrným reálným prostorem** a značíme symbolem $\mathbb{R}^n$. Reálná čísla $x_1, \dots, x_n$ nazýváme **souřadnicemi** bodu $X = (x_1, \dots, x_n)$.

DEFINICE 1.1.2

Nechť M_1, M_2 jsou libovolné množiny. Pak množina

$$M_1 \times M_2 = \{(x, y); x \in M_1, y \in M_2\}$$

se nazývá **kartézský součin** množin M_1, M_2 (v tomto pořadí).

Analogicky zavádíme kartézský součin množin $M_1, \dots, M_n$ $(n \geq 2)$ jako množinu

$$M_1 \times \cdots \times M_n = \{(m_1, \dots, m_n); m_i \in M_i, i = 1, 2, \dots, n\}. \tag{1.1}$$

Je-li $M_1 = M_2 = \cdots = M_n = M$, značíme kartézský součin (1.1) symbolem M^n a nazýváme jej n**–tá kartézská mocnina** množiny M.

DEFINICE 1.1.3

Nechť M je libovolná neprázdná množina. Reálná funkce ϱ definovaná na M^2 taková, že pro každé $X, Y, Z \in M$ platí:

(1) $\varrho(X,Y) \geq 0$ **axiom nezápornosti**

(2) $\varrho(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$ **axiom totožnosti**

(3) $\varrho(X,Y) = \varrho(Y,X)$ **axiom symetrie**

(4) $\varrho(X,Z) \leq \varrho(X,Y) + \varrho(Y,Z)$, **trojúhelníková nerovnost**

se nazývá **metrika** na množině M a dvojici (M, ϱ) nazýváme **metrický prostor**.
Prvky množiny M nazýváme **body** metrického prostoru (M, ϱ), množinu M **nosnou množinou** daného prostoru a číslo $\varrho(X,Y)$ **vzdáleností** bodů X, Y v metrickém prostoru (M, ϱ).

POZNÁMKA 1.1.1

Lze ukázat, že na množině $\mathbb{R}^n$ můžeme definovat různé metriky, např.:

(1) **Eukleidovská** – (viz dále)

(2) **Diskrétní**
Pro neprázdnou množinu M definujeme metriku $\varrho_d : M \times M \to \mathbb{R}$ takto:

$$\varrho_d(X,Y) = \begin{cases} 0, & \text{když } X = Y \\ 1, & \text{když } X \neq Y \end{cases}$$

(3) **Součtová**[a]
Tuto metriku definujeme na $\mathbb{R}^n$ jako $\varrho_s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ předpisem:

$$\varrho_s(X,Y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + \cdots + |y_n - x_n|,$$

kde $X = (x_1, \ldots, x_n), Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

(3) **Maximální**
Maximální metriku definujeme na $\mathbb{R}^n$ jako $\varrho_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ předpisem:

$$\varrho_\infty(X,Y) = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|, \ldots, |y_n - x_n|\},$$

kde $X = (x_1, \ldots, x_n), Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

[a] newyorská resp. manhattanská

DEFINICE 1.1.4

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dvojici $\mathbb{E}_n = (\mathbb{R}^n, \varrho)$ nazýváme **n–rozměrným eukleidovským prostorem**, jestliže pro každé dva body tohoto prostoru $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ je definována jejich metrika $\varrho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vztahem:

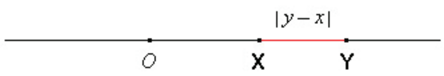
$$\varrho(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}. \tag{1.2}$$

Metrika ϱ se v tomto případě nazývá **eukleidovská metrika**.

Příklad 1.1.1:

(1) Pro $n = 1$ dostaneme jednorozměrný eukleidovský prostor $\mathbb{E}_1 = (\mathbb{R}^1, \varrho)$, jehož geometrickým znázorněním je číselná osa, kde pro libovolné dva body $X = (x), Y = (y) \in \mathbb{R}^1$ platí:

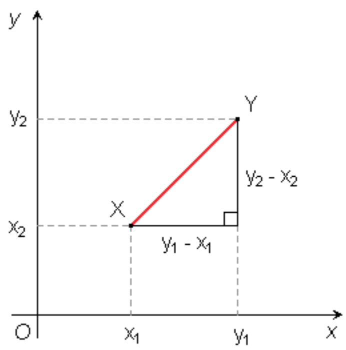
$$\varrho(X, Y) = \sqrt{(y - x)^2} = |y - x| \,.$$



Obrázek 1.1.1 *Eukleidovská metrika v* $\mathbb{E}_1$

(2) Pro $n = 2$ dostaneme dvojrozměrný eukleidovský prostor $\mathbb{E}_2 = (\mathbb{R}^2, \varrho)$, jehož geometrickým znázorněním je rovina (O, x, y) se zavedenou kartézskou soustavou souřadnic s počátkem $O = (0, 0)$ a s osami x, y, kde pro libovolné dva body $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ platí:

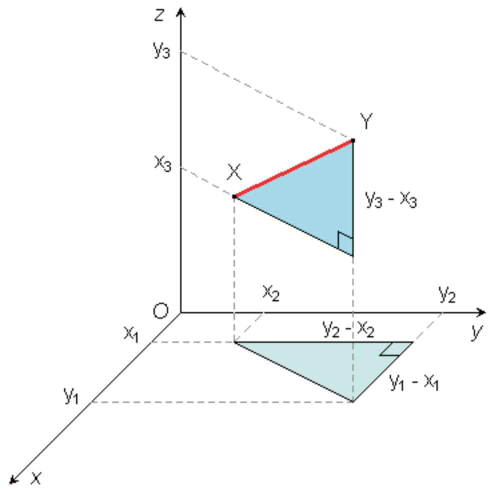
$$\varrho(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$



Obrázek 1.1.2 *Eukleidovská metrika v* $\mathbb{E}_2$

(3) Pro $n = 3$ dostaneme trojrozměrný eukleidovský prostor $\mathbb{E}_3 = (\mathbb{R}^3, \varrho)$, jehož geometrickým znázorněním je trojrozměrný prostor (O, x, y, z), kde pro libovolné dva body $X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ platí:

$$\varrho(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}.$$



Obrázek 1.1.3 *Eukleidovská metrika v* $\mathbb{E}_3$

Příklad 1.1.2: Určete vzdálenost bodů $A = (1, 0)$ a $B = (3, 1)$ v eukleidovské, součtové a maximální metrice.

Příklad 1.1.3: V eukleidovské, součtové a maximální metrice znázorněte v rovině všechny body $X \in \mathbb{R}^2$, pro které platí $\varrho(X, A) = 1$, kde $A = (-2, 1)$.

DEFINICE 1.1.5

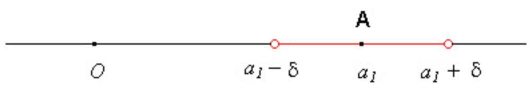
Je dáno reálné číslo $\delta > 0$ a libovolný bod $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{E}_n$. **Okolím** $\mathcal{O}(A)$ **bodu A** nazýváme množinu

$$\mathcal{O}(A) = \{X \in \mathbb{E}_n; \varrho(X, A) < \delta\},$$

kde ϱ je eukleidovská metrika.

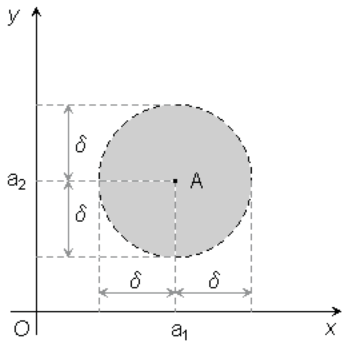
Příklad 1.1.4: Okolí bodu A v eukleidovské metrice ϱ_e :

(1) Okolím bodu $A \in \mathbb{E}_1$ je otevřený interval.



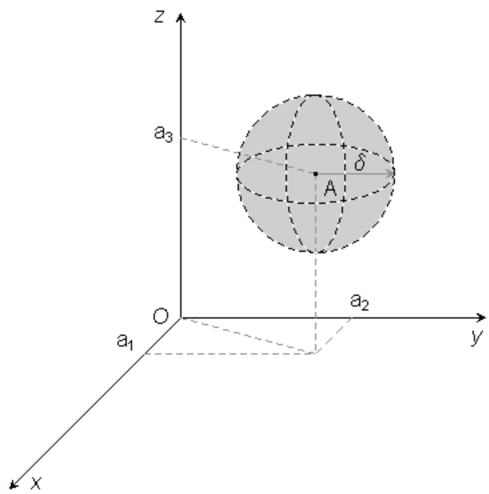
Obrázek 1.1.4 *Okolí bodu v* $\mathbb{E}_1$

(2) Okolím bodu $A \in \mathbb{E}_2$ je otevřený kruh (kruh bez bodů ležících na jeho hranici, jíž je kružnice).



Obrázek 1.1.5 *Okolí bodu v* $\mathbb{E}_2$

(3) Okolím bodu $A \in \mathbb{E}_3$ je otevřená koule (koule bez bodů tvořící její povrch).



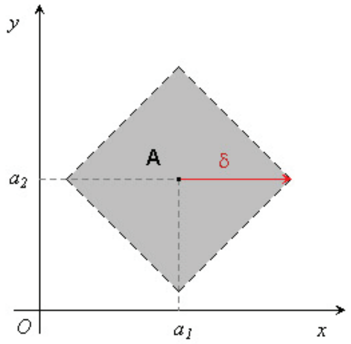
Obrázek 1.1.6 *Okolí bodu v* $\mathbb{E}_3$

POZNÁMKA 1.1.2

Obecně se okolí v $\mathbb{E}_n$ nazývá **otevřená** n**–rozměrná koule**.

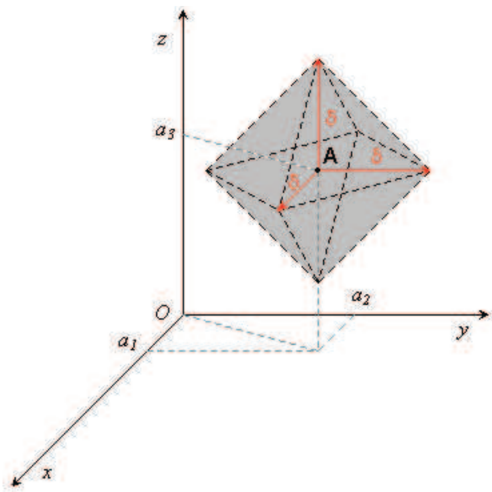
Příklad 1.1.5: Okolí bodu A v součtové metrice ϱ_s :

(1) v $\mathbb{R}^2$ čtvercové okolí



Obrázek 1.1.7 *Okolí bodu v součtové metrice v* $\mathbb{R}^2$

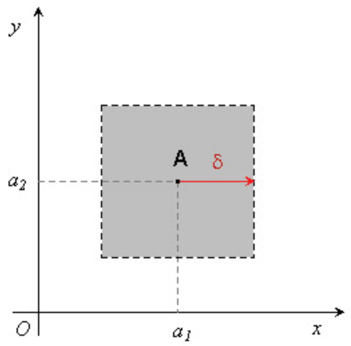
(2) v $\mathbb{R}^3$ krychlové okolí



Obrázek 1.1.8 *Okolí bodu v součtové metrice v* $\mathbb{R}^3$

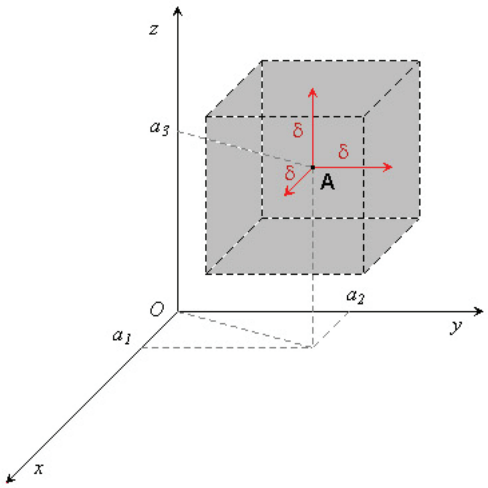
Příklad 1.1.6: Okolí bodu A v maximální metrice ϱ_∞ :

(1) v $\mathbb{R}^2$ čtvercové okolí



Obrázek 1.1.9 *Okolí bodu v maximální metrice v* $\mathbb{R}^2$

(2) v $\mathbb{R}^3$ krychlové okolí



Obrázek 1.1.10 *Okolí bodu v maximální metrice v* $\mathbb{R}^3$

atd.

Ve zbývající části tohoto odstavce se budeme zabývat eukleidovským metrickým prostorem.

VĚTA 1.1.1

Vlastnosti okolí:

1. Jsou-li $\mathcal{O}_1(A), \mathcal{O}_2(A)$ dvě různá okolí téhož bodu $A \in \mathbb{E}_n$, potom $\mathcal{O}_1(A) \cap \mathcal{O}_2(A)$ je také okolí bodu A.
2. Jsou-li $A, B \in \mathbb{E}_n, A \neq B$, pak existují okolí $\mathcal{O}_1(A), \mathcal{O}_2(B)$ taková, že $\mathcal{O}_1(A) \cap \mathcal{O}_2(B) = \emptyset$.
3. Je-li $\mathcal{O}_1(A)$ okolí bodu $A \in \mathbb{E}_n$, pak existuje okolí $\mathcal{O}_2(A)$ takové, že $\mathcal{O}_2(A) \subseteq \mathcal{O}_1(A)$.

DEFINICE 1.1.6

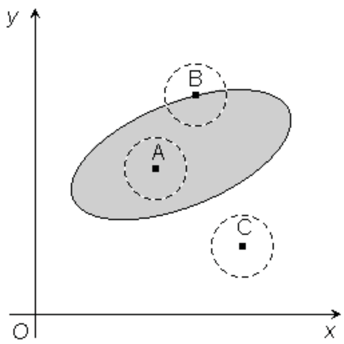
Uvažujme množinu $M \subset \mathbb{E}_n$. Bod A se nazývá:

(1) **vnitřní bod** množiny M, jestliže alespoň jedno jeho okolí je podmnožinou množiny M,

(2) **hraniční bod** množiny M, jestliže každé jeho okolí obsahuje alespoň jeden bod množiny M a současně alespoň jeden bod, který do množiny M nepatří,

(3) **vnější bod** množiny M, jestliže alespoň jedno jeho okolí neobsahuje žádný bod množiny M.

Množina vnitřních bodů množiny M se nazývá **vnitřek** množiny M a značí se obvykle M°.
Množina hraničních bodů množiny M se nazývá **hranice** množiny M a značí se obvykle $h(M)$.



Obrázek 1.1.11 *Vnitřní, hraniční a vnější bod množiny M*

DEFINICE 1.1.7

Množina $M \subset \mathbb{E}_n$se nazývá:

(1) **otevřená** v $\mathbb{E}_n$, jestliže každý bod této množiny je jejím vnitřním bodem,

(2) **uzavřená** v $\mathbb{E}_n$, jestliže obsahuje celou svou hranici,

(3) **omezená** v $\mathbb{E}_n$, jestliže existuje koule s konečným poloměrem R taková, že M leží uvnitř této koule.

(4) **kompaktní** v $\mathbb{E}_n$, jestliže je současně omezená a uzavřená.

DEFINICE 1.1.8

Množina $M \subset \mathbb{E}_n$ se nazývá **souvislá** v $\mathbb{E}_n$, jestliže každé dva její body lze spojit lomenou čarou která celá leží v M (tj. každý její bod patří do M).
Otevřená souvislá množina se nazývá **oblast**, uzavřená souvislá množina potom **uzavřená oblast**.

Příklad 1.1.7: Načrtněte danou množinu a rozhodněte, zda je otevřená, uzavřená, omezená, kompaktní či souvislá. Určete její vnitřek a hranici.

a) $A = \{3, 5\}$.

b) $A = (-1, 4) \subset \mathbb{E}_1$.

c) $A = (-\infty, 1] \cup [5, \infty) \subset \mathbb{E}_1$.

d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2; -1 < x \leq 0 \ \wedge \ y \geq 3\}$.

e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2; y \geq 1 - x \ \wedge \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

f) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3; 1 \leq x \leq 2 \ \wedge \ -2 \leq y \leq 2\}$.

g) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3; -1 \leq x \leq 1 \ \wedge \ 1 \leq y \leq 2 \ \wedge \ -1 \leq z \leq 3\}$.

1.2 Reálná funkce n – reálných proměnných

DEFINICE 1.2.1

Nechť $M \subseteq \mathbb{E}_n, n \geq 1, M \neq \emptyset$. Zobrazení $f : M \to \mathbb{E}_1$ se nazývá **reálná funkce n – reálných proměnných** a množina M se nazývá **definiční obor** této funkce a značí se $\mathbf{D_f}$.

POZNÁMKA 1.2.1

(1) Z předchozí definice vyplývá, že ke každému bodu $X = (x_1, \dots, x_n) \in M$ je přiřazeno právě jedno reálné číslo $y \in \mathbb{R}$.

(2) Reálné číslo y značíme $f(x_1, \dots, x_n)$ nebo $f(X)$ a nazýváme jej **funkční hodnotou** v bodě $X = (x_1, \dots, x_n)$.

(3) Množinu $N = f(M)$ hodnot y, které jsou přiřazeny jednotlivým bodům $X \in M$, nazýváme **obor hodnot** funkce $f(X)$ a značíme $\mathbf{H_f}$.

(4) Funkci dvou proměnných budeme místo $y = f(x_1, x_2)$ zapisovat ve tvaru $z = f(x, y)$ a funkci tří proměnných místo $y = f(x_1, x_2, x_3)$ ve tvaru $u = f(x, y, z)$.

Příklad 1.2.1: Zobrazte v $\mathbb{E}_2$ definiční obory funkcí:

a) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$,

b) $z = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)(\frac{x^2}{4} + y^2 - 2y)}$,

c) $z = \ln[1 - (x^2 + y)^2]$,

d) $z = \sqrt{\sin\left[\pi(x^2 + y^2)\right]}$,

e) $z = \arcsin\left[2y(1 + x^2) - 1\right]$,

DEFINICE 1.2.2

Nechť f je funkce n – proměnných definovaná na množině $M \subseteq \mathbb{E}_n, n \geq 2$. **Grafem G funkce f** nazýváme množinu bodů

$$G_f = \{(x_1, x_2, \dots, y) \in \mathbb{E}_{n+1};\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M,\ y = f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

DEFINICE 1.2.3

Je dána funkce $f(x, y)$ s definičním oborem $D_f \subseteq \mathbb{E}_2$ a oborem hodnot H_f. Nechť $c \in H_f$. **Vrstevnicí funkce f o kótě c** nazýváme množinu bodů

$$f_c = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{E}_3; f(x, y) = c \wedge (x, y) \in D_f\}.$$

Vrstevnicovým grafem funkce rozumíme kolmé průměty vrstevnic do roviny $0xy$ (tzv. mapa plochy).

Příklad 1.2.2: Pomocí vrstevnic a řezů rovinami $\varrho_{xz}, \varrho_{yz}$ zobrazte grafy funkcí:

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25}$

b) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

DEFINICE 1.2.4

Nechť f, g jsou dvě funkce $n-$proměnných. Pak definujeme nové funkce $f+g, f-g, f\cdot g, \frac{f}{g}$ takto:

$$(f+g)(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n) + g(x_1,\ldots,x_n),$$
$$(f-g)(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n) - g(x_1,\ldots,x_n),$$
$$(f\cdot g)(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n)\cdot g(x_1,\ldots,x_n),$$
$$\frac{f}{g}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{f(x_1,\ldots,x_n)}{g(x_1,\ldots,x_n)}, \quad g(x_1,\ldots,x_n) \neq 0.$$

DEFINICE 1.2.5

Nechť $M \subseteq \mathbb{E}_m, M \neq \emptyset$ a nechť na množině M jsou definovány funkce $m-$proměnných $u_1 = \varphi_1(x_1,\ldots,x_m), \ldots, u_n = \varphi_n(x_1,\ldots,x_m)$. Nechť $N \subseteq \mathbb{E}_n, N \neq \emptyset$ a nechť na množině N je definována funkce $n-$proměnných $f(u_1,\ldots,u_n)$. Jestliže pro každý bod $(x_1,\ldots,x_m) \in M \subseteq \mathbb{E}_m$ platí

$$(\varphi_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,\varphi_n(x_1,\ldots,x_m)) \in N \subseteq \mathbb{E}_n,$$

pak řekneme, že na množině M je definována **složená funkce**

$$y = f(\varphi_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,\varphi_n(x_1,\ldots,x_m)).$$

Funkce f se nazývá **vnější složka** složené funkce y, funkce $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ **vnitřní složky** funkce y.

Příklad 1.2.3: Dané funkce se dají vyjádřit jako funkce složené.

a) $z = (\sin x)^{\cos y}$; $\quad z = u^v, u = \sin x, v = \cos y.$

b) $z = \arctan \frac{u}{v}$; $\quad u = \sqrt{x}, v = \sin y.$

1.3 Limita funkce více proměnných

DEFINICE 1.3.1

Řekneme, že funkce $f(X)$ má v bodě $X_0 \in \mathbb{E}_n$ **limitu** rovnou $L \in \mathbb{R}^*$ [a], jestliže pro každé okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(X_0)$ bodu X_0 takové, že pro každý bod $X \in \mathcal{O}(X_0) \cap D_f$ platí $f(X) \in \mathcal{O}(L)$. Píšeme

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = L.$$

[a] Množinu $\mathbb{R}^n$ spolu s nevlastními body budeme označovat $\mathbb{R}^*$.

Jestliže $L \in \mathbb{R}$, nazývá se tato limita **vlastní**, v případě, že $L = \pm\infty$, mluvíme o limitě **nevlastní**. Bod X_0 se nazývá **limitní bod**.

POZNÁMKA 1.3.1

Pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ zapisujeme limitu v bodě (x_0, y_0) ve tvaru

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = L. \tag{1.3}$$

Příklad 1.3.1: Dále rozlišujeme tyto případy:

- **Nevlastní limita ve vlastním bodě**:
  $X_0 = (x_0, y_0)$ vlastní bod, $\quad L = \pm\infty$
  např. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x, y) = \infty.$
- **Vlastní limita v nevlastním bodě**:
  X_0 nevlastní bod, $L \in \mathbb{R}$
  např. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,1)} f(x, y) = 5.$
- **Nevlastní limita v nevlastním bodě**:
  X_0 nevlastní bod, $L = \pm\infty$
  např. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,-\infty)} f(x, y) = \infty$

POZNÁMKA 1.3.2

Rozdíl mezi limitou funkce jedné proměnné a více proměnných spočívá v tom, že u funkce jedné proměnné se k limitnímu bodu můžeme blížit pouze po přímce, kdežto u funkce více proměnných je těchto možností nekonečně mnoho (k danému bodu se můžeme blížit po přímce, parabole atd.). Aby v daném bodě existovala limita, nesmí záležet na cestě, po které se k danému bodu blížíme. Pokud tedy dostaneme pro různé cesty různé hodnoty limity, znamená to, že v daném bodě limita neexistuje.

Podobně jako pro funkci jedné proměnné platí pro limitu funkce více proměnných:

VĚTA 1.3.1

Libovolná funkce má v libovolném bodě $X_0 \in \mathbb{E}_n$ nejvýše jednu limitu.

VĚTA 1.3.2

Nechť $f(X), g(X)$ jsou dvě funkce $n-$proměnných, $X_0 \in \mathbb{E}_n$ a nechť

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = L_1, \quad \lim_{X \to X_0} g(X) = L_2, \quad L_1, L_2 \in \mathbb{R}.$$

Pak platí:

1. $\lim\limits_{X \to X_0} [c \cdot f(X)] = c \cdot L_1,\ c \in \mathbb{R},$
2. $\lim\limits_{X \to X_0} [f(X) \pm g(X)] = L_1 \pm L_2,$
3. $\lim\limits_{X \to X_0} [f(X) \cdot g(X)] = L_1 \cdot L_2,$
4. $\lim\limits_{X \to X_0} \left[\dfrac{f(X)}{g(X)}\right] = \dfrac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0.$

VĚTA 1.3.3

Nechť $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = 0$ a nechť existuje okolí $\mathcal{O}(X_0)$ bodu X_0, v němž je funkce $g(X)$ ohraničená.
Pak platí:

$$\lim_{X \to X_0} [f(X) \cdot g(X)] = 0.$$

VĚTA 1.3.4 (O třech limitách)

Nechť existuje okolí $\mathcal{O}(X_0)$ bodu $X_0 \in \mathbb{E}_n$ tak, že pro všechna $X \in \mathcal{O}(X_0)$ platí

$$g(X) \leq f(X) \leq h(X),$$

s případnou výjimkou v bodě X_0 samotném. Jestliže platí

$$\lim_{X \to X_0} g(X) = \lim_{X \to X_0} h(X) = L,$$

pak také $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = L.$

POZNÁMKA 1.3.3

Samotný výpočet limity funkce dvou a více proměnných je často obtížnější než u funkce jedné proměnné. Navíc neexistuje žádná analogie l'Hospitalova pravidla pro počítání neurčitých výrazů (tj. limity typu "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$"). Z toho důvodu používáme při výpočtu limit různé úpravy dané funkce.

1.4 Spojitost funkce více proměnných

DEFINICE 1.4.1

Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** $X_0 \in \mathbb{E}_n$, jestliže

1. existuje $f(X_0)$, tj. funkce f je v bodě X_0 definovaná
2. existuje vlastní $\lim\limits_{X \to X_0} f(X)$, tj. funkce f má v bodě X_0 vlastní limitu
3. platí $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = f(X_0)$.

POZNÁMKA 1.4.1

Pro funkci dvou proměnných dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Protože spojitost funkce dvou a více proměnných se definuje pomocí pojmu limity funkce stejně jako pro funkci jedné proměnné, platí analogická věta, že součet, rozdíl, součin a podíl spojitých funkcí je spojitá funkce, a také platí věta o spojitosti složené funkce. Obě věty uvedeme pro funkci dvou proměnných.

VĚTA 1.4.1

Jsou-li funkce f, g spojité v bodě $(x_0, y_0) \in \mathbb{E}_2$, pak jsou v tomto bodě spojité i funkce $f \pm g, f \cdot g$ a je-li $g(x_0, y_0) \neq 0$, je v tomto bodě spojitá také funkce f/g.

VĚTA 1.4.2 (O spojitosti složené funkce)

Nechť funkce g, h jsou spojité v bodě $(x_0, y_0), u_0 = g(x_0, y_0), v_0 = h(x_0, y_0)$ a funkce f je spojitá v bodě (u_0, v_0). Pak je v bodě (x_0, y_0) spojitá složená funkce $F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$.

DEFINICE 1.4.2

Řekneme, že funkce f je **spojitá na množině** $M \subseteq \mathbb{E}_2$, jestliže pro každý bod $(x_0, y_0) \in M$ platí

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in M}} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Příklad 1.4.1: Všechny polynomické, mocninné, exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklometrické funkce a také všechny funkce, které z nich získáme konečným počtem operací sčítání, odečítání, násobení, dělení a skládání, jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

1.4.1 Věty o spojitých funkcích

VĚTA 1.4.3 (Weierstrassova)

Je-li funkce f spojitá na kompaktní množině $M \subset \mathbb{E}_2$, pak nabývá na M své největší a nejmenší hodnoty.

VĚTA 1.4.4 (Bolzanova)

Nechť funkce f je spojitá na otevřené souvislé množině $M \subset \mathbb{E}_2$ a nechť pro body $A, B \in M$ platí $f(A) \neq f(B)$. Potom ke každému číslu c, které leží mezi hodnotami $f(A)$ a $f(B)$, existuje bod $C \in M$ tak, že $f(C) = c$.

DŮSLEDEK 1.4.1

Nechť funkce f je spojitá na otevřené souvislé množině $M \subset \mathbb{E}_2$. Existují-li body $A, B \in M$ takové, že $f(A) < 0, f(B) > 0$, pak existuje bod $C \in M$ tak, že $f(C) = 0$.

1.5 Parciální derivace 1. řádu

DEFINICE 1.5.1

Nechť funkce $f : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_1$ je definovaná v bodě (x_0, y_0) a v nějakém jeho okolí.

1. Položme $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Má-li funkce $\varphi(x)$ jedné proměnné x derivaci v bodě x_0, nazýváme tuto derivaci **parciální derivací** funkce f **podle proměnné x** v bodě (x_0, y_0) a označujeme $f'_x(x_0, y_0)$, nebo také $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Je definována jako limita
$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

2. Položme $\psi(y) = f(x_0, y)$. Má-li funkce $\psi(y)$ jedné proměnné y derivaci v bodě y_0, nazýváme tutu derivaci **parciální derivací** funkce f **podle proměnné y** v bodě (x_0, y_0) a označujeme $f'_y(x_0, y_0)$, příp. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Platí tedy
$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{\psi(y) - \psi(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

POZNÁMKA 1.5.1

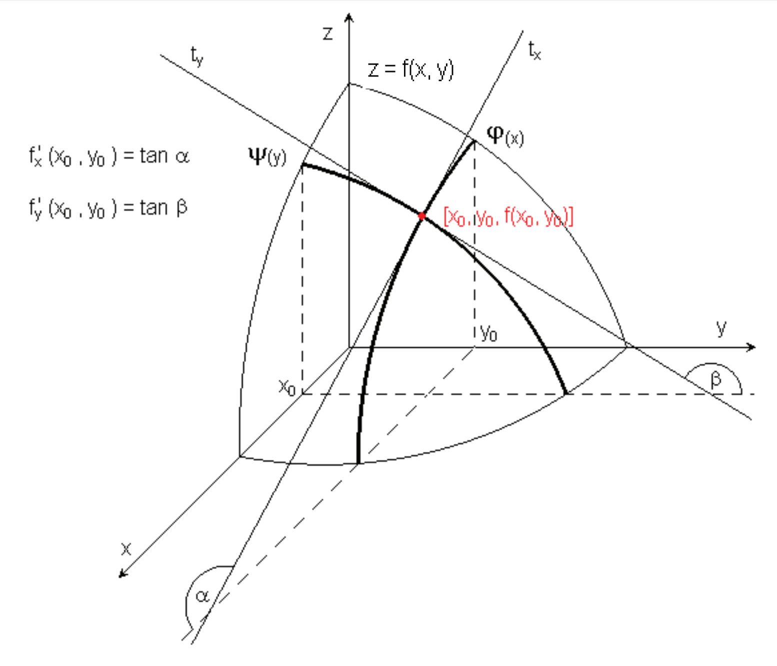
1. Má-li funkce $z = f(x, y)$ parciální derivace ve všech bodech množiny $M \subset D_f$, jsou tyto derivace funkcemi proměnných x, y. Označujeme je $f'_x(x, y), f'_y(x, y), z'_x, z'_y, \dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y), \dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y)$.

2. Parciální derivace funkce n proměnných se definují analogicky. Nechť $z = f(x_1, \dots, x_n)$ je funkce n proměnných a bod $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{E}_n$. Položme $\varphi_i(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$. Má-li funkce $\varphi_i(x_i)$ derivaci v bodě A podle proměnné x_i, nazývá se tato derivace **parciální derivace funkce** f **podle proměnné** x_i **v bodě** A a značí se $f'_{x_i}(A)$, příp. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$. To znamená, že
$$f'_{x_i}(A) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{\varphi_i(x_i) - \varphi_i(a_i)}{x_i - a_i}$$
$$= \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{x_i - a_i}.$$
Parciální derivace f'_{x_i} funkce n–proměnných je tedy definována jako obyčejná derivace podle jedné proměnné x_i.

3. Přímo z definice parciální derivace plyne návod, jak parciální derivace počítat. Parciální derivaci funkce podle zvolené proměnné vypočítáme tak, že funkci derivujeme pouze podle této zvolené proměnné a ostatní proměnné přitom považujeme za konstanty. Při výpočtu užíváme stejná pravidla jako při derivování funkce jedné proměnné (tj. derivace součtu, rozdílu, součinu, podílu).

POZNÁMKA 1.5.2

Geometrický význam parciálních derivací.
Uvažujme funkci $z = f(x, y)$ definovanou na oblasti M a zvolme bod $(x_0, y_0) \in M$.



Obrázek 1.5.1 *Parciální derivace*

1. Bodem $(0, y_0, 0)$ veďme rovinu rovnoběžnou se souřadnou rovinou ϱ_{xz}. Její rovnice bude $y = y_0$. Průsečnicí této roviny s grafem funkce $z = f(x, y)$ je křivka $\varphi(x)$. Sestrojíme-li tečnu t_x k této křivce v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (v rovině $y = y_0$), pak směrnice této tečny je rovna parciální derivaci $f'_x(x_0, y_0)$. Protože směrnice tečny je rovna velikosti úhlu α, který svírá tato tečna s kladným směrem osy x, platí $f'_x(x_0, y_0) = \tan \alpha$.

2. Analogicky, rovina rovnoběžná se souřadnou rovinou ϱ_{yz} a procházející bodem $(x_0, 0, 0)$ má rovnici $x = x_0$. Průsečnicí této roviny s grafem funkce $z = f(x, y)$ je křivka $\psi(y)$. Tečna t_y sestrojená k této křivce v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (v rovině $y = y_0$) má směrnici, která je rovna parciální derivaci $f'_y(x_0, y_0)$. Pro tuto směrnici platí $f'_y(x_0, y_0) = \tan \beta$, kde β je úhel, který svírá tato tečna s kladným směrem osy y.

Příklad 1.5.1: Vypočtěte první parciální derivace funkcí:

a) $f(x, y) = x^3 + 2x^2y - 3xy^2 - 4x - 7$.

b) $f(x, y) = \operatorname{arctan} \dfrac{x - y}{x + y}$

c) $f(x, y) = \ln \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$

d) $f(x, y, z) = x^{\frac{y}{z}}, x > 0$.

1.6 Parciální derivace vyšších řádů

DEFINICE 1.6.1

Nechť $(x_0, y_0) \in D_{f'_x}$. Existuje-li parciální derivace funkce $f'_x(x, y)$ podle proměnné x v bodě (x_0, y_0), nazýváme tuto derivaci **parciální derivací 2. řádu podle x** funkce f v bodě (x_0, y_0) a značíme $f''_{xx}(x_0, y_0)$, příp. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$.
Existuje-li parciální derivace funkce $f'_x(x, y)$ podle proměnné y v bodě (x_0, y_0), nazýváme tuto derivaci **smíšenou parciální derivací 2. řádu** funkce f v bodě (x_0, y_0) a značíme $f''_{xy}(x_0, y_0)$, příp. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

Obdobně definujeme parciální derivace 2. řádu $f''_{yx}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ a $f''_{yy}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$.

POZNÁMKA 1.6.1

1. Má-li funkce $z = f(x, y)$ na množině $M \subseteq D_f$ parciální derivace f'_x, f'_y a pokud existují na množině $N \subseteq M$ parciální derivace funkcí f'_x, f'_y podle x, příp. podle y, pak je značíme

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = z''_{xx}$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z''_{xy}$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z''_{yx}$$

$$f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = z''_{yy}$$

2. Parciální derivace $n-$tého řádu $(n \geq 3)$ definujeme jako parciální derivace derivací $(n - 1)-$tého řádu.

Příklad 1.6.1: Vypočtěte parciální derivace 2. řádu funkce $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$.

VĚTA 1.6.1 (Schwarzova)

Nechť funkce $f(x, y)$ má v bodě (x_0, y_0) a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace f''_{xy}, f''_{yx}. Pak jsou tyto derivace záměnné, tj. platí

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

VĚTA 1.6.2 (Zobecněná Schwarzova věta)

Nechť funkce $f(x, y)$ má v bodě (x_0, y_0) a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu n. Pak jsou tyto parciální derivace záměnné, tj. hodnota parciální derivace řádu n v libovolném bodě z tohoto okolí závisí pouze na tom, kolikrát se derivovalo podle proměnné x a kolikrát podle proměnné y, nikoliv na pořadí, v jakém se podle těchto proměnných derivovalo.

VĚTA 1.6.3 (Zobecnění zobecněné Schwarzovy věty)

Nechť funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$ má v bodě $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu k. Pak jsou tyto derivace záměnné, tj. hodnota každé takové derivace $k-$tého řádu závisí pouze na tom, kolikrát se derivuje podle proměnných $x_1, \ldots, x_n$, nikoliv na pořadí.

1.7 Totální diferenciál

DEFINICE 1.7.1

Buď M otevřená množina. Řekneme, že funkce f je **hladká** na M, jestliže má na M spojité všechny parciální derivace. Řekneme, že funkce f je na M **hladká řádu** k**,** jestliže má na M spojité všechny parciální derivace až do řádu k.

POZNÁMKA 1.7.1

Pro funkci jedné proměnné platilo: **Má-li funkce** $f(x)$ **v bodě** x_0 **derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.**
Pro funkci více proměnných podobná věta neplatí, z existence parciálních derivací neplyne spojitost (neboť parciální derivace udávají informaci pouze o chování funkce ve směrech rovnoběžných se souřadnými osami, přičemž v jiných směrech se funkce může chovat zcela odlišně). Spojitost plyne až z existence a spojitosti parciálních derivací. Následující věta udává, že funkce hladké v okolí nějakého bodu jsou v tomto bodě spojité, mají v tomto bodě tečnou rovinu a funkční hodnoty těchto funkcí můžeme aproximovat funkčními hodnotami na této tečné rovině.

VĚTA 1.7.1

Nechť funkce f má definované a spojité parciální derivace v okolí bodu (x_0, y_0). Pak platí:

1. funkce f je v bodě (x_0, y_0) spojitá,
2. rovina o rovnici

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \tag{1.4}$$

   je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$,

3. platí vzorec pro přibližné určení hodnoty $f(x, y)$

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0). \tag{1.5}$$

POZNÁMKA 1.7.2

Normála grafu funkce f v bodě $T = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ je přímka n kolmá k tečné rovině grafu v bodě dotyku T. Směrový vektor této normály je roven normálovému vektoru tečné roviny, takže parametrické vyjádření normály je

$$\begin{aligned} x &= x_0 + f'_x(x_0, y_0) \cdot t, \\ y &= y_0 + f'_y(x_0, y_0) \cdot t, \\ z &= f(x_0, y_0) - t. \end{aligned}$$

Příklad 1.7.1: Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce $z = x^2 + y^2$ v bodě $T = (1, 1, ?)$.

DEFINICE 1.7.2

Nechť funkce $f(x, y)$ dvou proměnných má spojité parciální derivace v bodě (x_0, y_0). Výraz

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\, dx + f'_y(x_0, y_0)\, dy \tag{1.6}$$

nazýváme **totální diferenciál funkce f v bodě** (x_0, y_0).

POZNÁMKA 1.7.3

1. Přírůstky dx, dy ve vztahu (1.6) zapisujeme také ve tvaru $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$.
2. Je-li funkce f hladká v každém bodě množiny M, má v každém bodě této množiny diferenciál. Píšeme

$$df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

3. Diferenciál se používá k přibližnému výpočtu funkčních hodnot.

Příklad 1.7.2: Vypočtěte diferenciál funkce:

$$f\,(x,y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

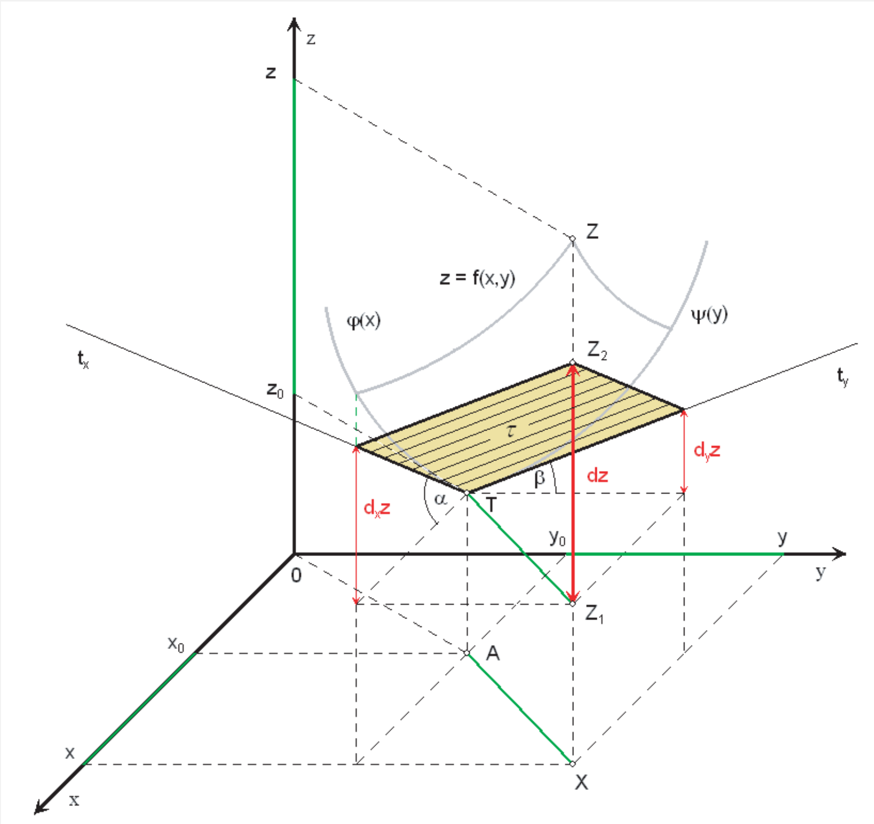
Příklad 1.7.3: Vypočtěte hodnotu diferenciálu zadané funkce v daném bodě a pro dané přírůstky:

$$f\,(x,y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy} \quad \text{v bodě}\,(1,2)\,,\ dx = 0{,}02, dy = 0{,}01.$$

Příklad 1.7.4: Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně: $\sqrt{(2{,}98)^2+(4{,}05)^2}$.

POZNÁMKA 1.7.4

Geometrický význam totálního diferenciálu.



Obrázek 1.7.1 *Totální diferenciál*

1.8 Diferenciály vyšších řádů

DEFINICE 1.8.1

Nechť funkce f má v okolí bodu (x_0, y_0) spojité parciální derivace až do řádu k včetně. **Diferenciálem** k**–tého řádu** funkce f v bodě (x_0, y_0) rozumíme funkci

$$d^k f(x_0, y_0) = d(d^{k-1} f(x_0, y_0)).$$

POZNÁMKA 1.8.1

Pro $k = 1$ dostáváme **totální diferenciál 1. řádu**

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\, dx + f'_y(x_0, y_0)\, dy.$$

Pro $k = 2$ máme **totální diferenciál 2. řádu**

$$d^2 f(x_0, y_0) = d(df(x_0, y_0))$$

$$= f''_{xx}(x_0, y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)dxdy + f''_{yy}(x_0, y_0)dy^2.$$

Pro $k = 3$ bude **totální diferenciál 3. řádu** ve tvaru

$$d^3 f(x_0, y_0) = d(d^2 f(x_0, y_0))$$

$$= f'''_{xxx}(x_0, y_0)dx^3 + 3f'''_{xxy}(x_0, y_0)dx^2dy + 3f'''_{xyy}(x_0, y_0)dxdy^2 + f'''_{yyy}(x_0, y_0)dy^3.$$

Příklad 1.8.1: Určete diferenciál 2. řádu v obecném bodě (x, y) pro funkci $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2y + 3xy^2$.

1.9 Parciální derivace složené funkce

Vzorce pro parciální derivace složených funkcí jsou jedním z nejdůležitějších nástrojů řešení rovnic matematické fyziky. Tyto rovnice jsou tzv. **parciální diferenciální rovnice**, což jsou rovnice, které obsahují parciální derivace neznámé funkce a jejichž řešení jsou funkce dvou či více proměnných. Tyto rovnice transformujeme pomocí odvozených vzorců na jednodušší tvar, z něhož buď již umíme najít řešení nebo alespoň můžeme vyvodit některé důležité vlastnosti řešení rovnice.

VĚTA 1.9.1

Nechť funkce $u = u(x, y), v = v(x, y)$ mají parciální derivace prvního řádu v bodě (x_0, y_0). Označme $u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0)$. Má-li funkce $z = f(u, v)$ diferenciál v bodě (u_0, v_0), pak složená funkce $z = F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ má parciální derivace 1. řádu v bodě (x_0, y_0) a platí tzv. **řetězové pravidlo**:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Zkráceně píšeme

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x,$$

$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y,$$

nebo také

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Příklad 1.9.1: Vypočtěte parciální derivace složené funkce

$$f(u, v) = \ln(u + v^3),$$

kde $u = u(x, y) = e^{xy}, \quad v = v(x, y) = x^2 + y.$

1.10 Derivace funkce ve směru a gradient funkce

Parciální derivace funkce f v bodě (x_0, y_0) jsou obyčejné derivace ve směru souřadných os x, y. Zobecněním parciálních derivací jsou směrové derivace, které získáme zúžením definičního oboru funkce na přímku jdoucí bodem (x_0, y_0) a mající směr daného vektoru $\vec{u}$.

DEFINICE 1.10.1

Nechť f je funkce 2 proměnných x, y a $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ vnitřní bod definičního oboru D_f. Dále nechť $\vec{u} \in \mathbb{V}_2$, kde $\mathbb{V}_2$ je zaměření eukleidovského prostoru $\mathbb{E}_2$. Sestrojme funkci g jedné proměnné danou předpisem

$$g(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta).$$

Má-li funkce $g(t)$ v bodě $t = 0$ vlastní derivaci $g'(0)$, nazýváme tuto derivaci **derivací funkce f v bodě (x_0, y_0) ve směru vektoru $\vec{u}$** a značíme $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$. nebo také $f'_{\vec{u}}(A)$. To znamená, že

$$f'_{\vec{u}}(A) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t}. \tag{1.7}$$

Čísla $\cos\alpha, \cos\beta$ nazýváme **směrové kosiny** vektoru $\vec{u}$.

VĚTA 1.10.1

Je-li funkce $f(x, y)$ diferencovatelná v bodě (x_0, y_0), pak má v tomto bodě derivaci v libovolném směru $\vec{u} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ a platí:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \cos\beta.$$

POZNÁMKA 1.10.1

Je-li funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ diferencovatelná v bodě $A \in \mathbb{R}^n$, pak má v tomto bodě derivaci v libovolném směru $\vec{u} = (\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n)$ a platí:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(A) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot \cos\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) \cdot \cos\alpha_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \cdot \cos\alpha_n.$$

POZNÁMKA 1.10.2

Pro směrové kosiny vektoru $\vec{u} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ platí:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

Analogicky pro vektor $\vec{u} = (\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n)$ platí:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cdots + \cos^2\alpha_n = 1.$$

Příklad 1.10.1: Vypočtěte derivaci funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ v bodě $(1, 3)$ ve směru vektoru $\vec{u} = (\cos\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{3})$

DEFINICE 1.10.2

Nechť funkce $f(x,y)$ je diferencovatelná v bodě (x_0,y_0). Pak vektor, který označujeme grad $f(x_0,y_0)$ nebo též ∇f a definujeme předpisem

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

nazýváme **gradient funkce** f **v bodě** (x_0,y_0).

POZNÁMKA 1.10.3

1. Je-li funkce $f(x,y)$ diferencovatelná na množině $M \subseteq D_f$, pak

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

2. Analogicky pro funkci n proměnných, která je diferencovatelná ve všech bodech množiny $M \subseteq D_f$, se vektor

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

nazývá **gradient funkce** f.

3. Platí vzorec

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(A) = \operatorname{grad} f(A) \cdot \vec{u}.$$

POZNÁMKA 1.10.4

Vlastnosti gradientu:

1. Směr gradientu je směrem největšího růstu funkce f v bodě (x_0,y_0). V opačném směru funkce f nejrychleji klesá.

2. Velikost gradientu

$$|\operatorname{grad} f| = \sqrt{{f'_x}^2 + {f'_y}^2}$$

udává největší rychlost změny funkce f.

Příklad 1.10.2: Vypočtěte gradient funkce $f(x,y) = \frac{4}{x^2+y^2}$ v bodě $(-1,2)$.

1.11 Lokální extrémy

DEFINICE 1.11.1

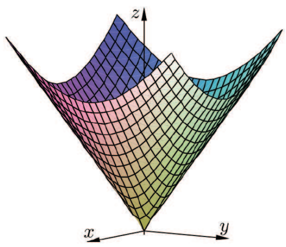
Řekneme, že funkce $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_1$ má v bodě $X_0 \in \mathbb{E}_n$ **lokální maximum (minimum)**, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(X_0)$ bodu X_0 takové, že pro každý bod $X \in \mathcal{O}(X_0)$ platí

$$f(X) \leq f(X_0) \quad \text{pro lokální maximum,}$$

$$f(X) \geq f(X_0) \quad \text{pro lokální minimum.}$$

Jsou-li nerovnosti v těchto vztazích ostré, mluvíme o **ostrých lokálních maximech a minimech.** (Ostrá) lokální maxima a minima se nazývají **(ostré) lokální extrémy.**

Příklad 1.11.1: Funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ má v bodě $(x,y) = (0,0)$ ostré lokální minimum, neboť $f(0,0) = 0$ a pro každé $(x,y) \neq (0,0)$ je $f(x,y) > 0$.



Obrázek 1.11.1 *Kuželová plocha*

DEFINICE 1.11.2

Nechť $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_1$. Řekneme, že bod $X_0 \in \mathbb{E}_n$ je **stacionární bod** funkce f, jestliže v bodě X_0 existují všechny parciální derivace funkce f a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.8}$$

Následující věta udává nutnou podmínku existence lokálního extrému.

VĚTA 1.11.1

Nechť funkce $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_1$ má v bodě $X_0 \in \mathbb{E}_n$ lokální extrém a v tomto bodě existují všechny parciální derivace funkce f. Pak je bod X_0 jejím stacionárním bodem, tj. platí (1.8).

POZNÁMKA 1.11.1

Funkce $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_1$ může mít lokální extrém pouze ve svém stacionárním bodě nebo v bodě, kde aspoň jedna z parciálních derivací neexistuje.

POZNÁMKA 1.11.2

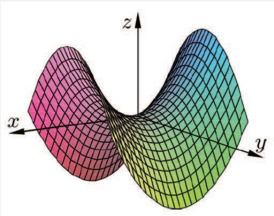
Stacionární bod nemusí být bodem lokálního extrému, jak ukazuje příklad funkce $f\,(x,y)=x^2-y^2$.
Stacionární bod je $P=(0,0)$, ale

$$f(x,0)=x^2>0 \quad \text{pro} \quad x\neq 0,$$

a

$$f(0,y)=-y^2<0 \quad \text{pro} \quad y\neq 0,$$

a tedy podle definice není v bodě $(0,0)$ lokální extrém.



Obrázek 1.11.2 *Hyperbolický paraboloid*

Stacionární bod definičního oboru funkce f, v němž nenastává lokální extrém, nazýváme **sedlový bod** nebo **sedlo** funkce f.

Nyní uvedeme postačující podmínku pro existenci lokálního extrému funkce ve stacionárním bodě. Nejprve zformulujeme větu pro funkci dvou proměnných.

VĚTA 1.11.2

Nechť funkce $f:\mathbb{E}_2\to\mathbb{E}_1$ má v bodě (x_0,y_0) a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a nechť (x_0,y_0) je její stacionární bod. Jestliže

$$D(x_0,y_0)=f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0)-\left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2>0,$$

pak má funkce f v bodě (x_0,y_0) ostrý lokální extrém.
Je-li přitom $f''_{xx}(x_0,y_0)>0$, jde o lokální minimum, je-li $f''_{xx}(x_0,y_0)<0$, jde o lokální maximum.
Jestliže $D(x_0,y_0)<0$, pak v bodě (x_0,y_0) lokální extrém nenastává.

POZNÁMKA 1.11.3

Jestliže $D(x_0,y_0)=0$, pak nelze pomocí druhých derivací rozhodnout. V tom případě někdy rozhodujeme na základě vyšetření lokálního chování funkce v okolí bodu (x_0,y_0) bez počítání druhých derivací.

POZNÁMKA 1.11.4

Postup při hledání lokálních extrémů funkce dvou proměnných.

1. Určíme definiční obor funkce f.
2. Najdeme parciální derivace funkce f.
3. Vyřešíme soustavu dvou rovnic pro stacionární body.
4. Rozhodneme pomocí předchozí věty pro každý stacionární bod individuálně, zda a jaký v něm nastane lokální extrém.
5. Body, v nichž nelze podle předchozího kroku rozhodnout a body, v nichž neexistuje alespoň jedna z parciálních derivací, vyšetřujeme individuálně.

Příklad 1.11.2: Určete lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Příklad 1.11.3: Určete lokální extrémy funkce $f(x,y) = xye^{(-\frac{x^2+y^2}{2})}$.

Příklad 1.11.4: Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + ln(12 - x - y).$$

1.12 Absolutní (globální) extrémy

O absolutních extrémech mluvíme tehdy, pokud je předepsána množina a máme najít bod této množiny, v němž funkce nabývá své největší resp. nejmenší hodnoty.

DEFINICE 1.12.1

Nechť $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_1, M \subset D_f$. řekneme, že bod $X_0 \in M$ je bodem *absolutního maxima* (*minima*) funkce f na M, jestliže pro každý bod $X \in M$ platí:

$$f(X) \le f(X_0) \quad \text{pro absolutní maximum,}$$

$$f(X) \ge f(X_0) \quad \text{pro absolutní minimum.}$$

Jsou-li nerovnosti v těchto vztazích ostré, mluvíme o *ostrých absolutních maximech a minimech.* Absolutní maxima a minima nazýváme *absolutní* (*globální*) *extrémy.*

POZNÁMKA 1.12.1

Pro funkci jedné proměnné platí: spojitá funkce jedné proměnné na uzavřeném a ohraničeném intervalu nabývá své největší a nejmenší hodnoty buď v bodě lokálního extrému ležícím uvnitř intervalu nebo v jednom z krajních bodů. Podobně je to u funkce více proměnných.

VĚTA 1.12.1

Nechť $M \subset \mathbb{E}_n$ je kompaktní množina (tj. uzavřená a ohraničená) a funkce $f : M \to \mathbb{E}_1$ je spojitá na M. Pak f nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálního extrému nebo v některém hraničním bodě.

POZNÁMKA 1.12.2

Postup při hledání absolutních extrémů funkce dvou proměnných:

1. určíme definiční obor a graficky znázorníme množinu M,
2. určíme stacionární body uvnitř množiny,
3. vyšetříme funkce na hranici množiny, tj. dosazení rovnice křivky, která tvoří část hranice, do funkce (vyšetřujeme tedy extrémy vzniklé funkce jedné proměnné),
4. zjistíme funkční hodnoty ve všech takto nalezených bodech a z nich vybereme maximální a minimální číselné hodnoty.

Příklad 1.12.1: Určete globální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$$

v obdélníku omezeném přímkami $x = 0,\ y = 0,\ x = 1,\ y = 2.$

Příklad 1.12.2: Určete nejmenší a největší hodnotu funkce

$$f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 3xy + 1$$

v trojúhelníku o vrcholech $(0,0)\,,(2,0)\,,(0,2)$.

Příklad 1.12.3: Určete nejmenší a největší hodnotu funkce

$$f(x,y) = \left(2x^2 + 3y^2\right) \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$$

na množině $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.

1.13 Vázané extrémy

DEFINICE 1.13.1

Nechť $M \subset \mathbb{E}_n$ je množina bodů X vyhovující soustavě rovnic

$$g_1\left(x_1, \ldots x_n,\right) = 0, \ldots, g_k\left(x_1, \ldots x_n,\right) = 0, \text{kde} \quad k < n.$$

Množinu jejich řešení označíme M. Extrém funkce f n proměnných vzhledem k množině $M \cap D_f$ se nazývá *vázaný extrém* funkce f vzhledem k vazbě M. Rovnice $g_1\left(x_1, \ldots x_n,\right) = 0, \ldots, g_k\left(x_1, \ldots x_n,\right) = 0$ se nazývají *vazební rovnice.*

Ke stanovení podezřelých bodů uvedeme následující metody:

1. **Dosazovací metodu**.
   Používá se v případě jednoduchých vazebních rovnic.
2. **Metodou využívající jakobiánu**.
   Používá se pouze v případě, že vazebních rovnic je o jednu méně než proměnných.
3. **Metodu Lagrangeových multiplikátorů**.
   Ke stanovení podezřelých bodů se zavádí nová proměnná, tzv. Lagrangeův multiplikátor, který mívá v ekonomických úlohách rovněž ekonomickou interpretaci. Výpočet podezřelých bodů bývá pracnější než u předchozí metody. Tuto metodu zde neuvádíme.

DOSAZOVACÍ METODA

Mějme funkci f o n proměnných a k vazebních rovnic

$$g_1(X) = 0, \ldots, g_k(X) = 0, \quad k < n, \quad X \in \mathbb{E}_n.$$

1. Z k vazebních rovnic vypočteme k proměnných (tento krok ovšem někdy nelze provést). Těchto k proměnných je tak vyjádřeno jako funkce zbývajících $(n-k)$ proměnných.

2. Vypočtených k proměnných dosadíme do funkčního předpisu funkce f. Dostaneme funkci o zbývajících $(n-k)$ proměnných, kterou označíme h.

3. Stanovíme body o $(n-k)$ souřadnicích, jež jsou podezřelé z globálního extrému funkce a globální extrémy funkce h v těchto bodech. Hodnoty těchto extrémů se rovnají hodnotám vázaných extrémů funkce f vzhledem k dané vazbě a vázané extrémy nastávají v příslušných bodech, jejichž zbývajících k souřadnic dopočítáme z vazebních rovnic.

Příklad 1.10.1
Stanovte vázané extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$ vzhledem k úsečce $g(x,y) = x - 2y + 1 = 0$ pro $x \in \langle 3, 5 \rangle$.

METODA UŽÍVAJÍCÍ JAKOBIÁNU

Tato metoda k určení vázaných extrémů je založena na použití determinantu $J(X)$ zvaného jakobián. Řádky jakobiánu jsou tvořeny parciálními derivacemi funkce f, jejíž extrémy zkoumáme, a parciálními derivacemi jednotlivých vazebních funkcí. Jelikož determinant má stejný počet řádků a sloupců, musí tedy být všech vazebních funkcí spolu s funkcí f stejně jako proměnných. Tato metoda je tedy použitelná pouze v případě, že vazebních dvojic je o jednu méně než proměnných. Uvádíme jakobián pro funkce dvou a n proměnných:

$$J_{f,g}(X) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}, \qquad J_{f,g_1,\dots,g_{n-1}}(X) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

VĚTA 1.13.1 (nutná podmínka vázaného extrému)

Má-li funkce f v bodě C vázaný extrém vzhledem k vazbě dané rovnicemi $g_1(X) = 0, \dots, g_{n-1}(X) = 0$ a funkce $f, g_1, \dots, g_{n-1}$ jsou v okolí bodu C hladké, pak je determinant $J(X)$ v bodě C roven nule.

Z výše uvedené věty vyplývá následující postup výpočtu:

POSTUP STANOVENÍ VÁZANÉHO EXTRÉMU POMOCÍ JAKOBIÁNU

pro funkci f o n proměnných na vazbě dané $(n-1)$ vazebními rovnicemi

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

1. Ověříme, zda funkce f je spojitá a vazební rovnice popisují neprázdnou kompaktní množinu. Pak je podle zobecněné *Weierstrassovy věty*, která říká, že „*spojitá reálná funkce více proměnných definovaná na neprázdné kompaktní množině nabývá na této množině svého maxima a minima*“, zaručena existence obou extrémů. Pokud tyto podmínky nejsou splněny, dají se následujícím postupem stanovit pouze body podezřelé z extrému.

2. Stanovíme body podezřelé z vázaného extrému: jsou to jednak body, v nichž není splněn předpoklad hladkosti některé z uvažovaných funkcí, jednak body vyhovující soustavě n rovnic (jakobiánu rovnému nule a $(n-1)$ vazebním rovnicím) o n neznámých souřadnicích.

3. Stanovíme oba extrémy podle postupu pro stanovení globálních extrémů spojité funkce na kompaktní množině: určíme funkční hodnoty v podezřelých bodech a vybereme z nich největší a nejmenší.

Příklad 1.10.2

Stanovte vázané extrémy funkce $f(x,y) = x - \sqrt{3}y + 1$ vzhledem k vazbě dané rovnicí $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$.

1.14 Funkce zadaná implicitně

1.14.1 Implicitně zadaná funkce jedné proměnné

DEFINICE 1.14.1

Nechť F je funkce dvou proměnných. Označme

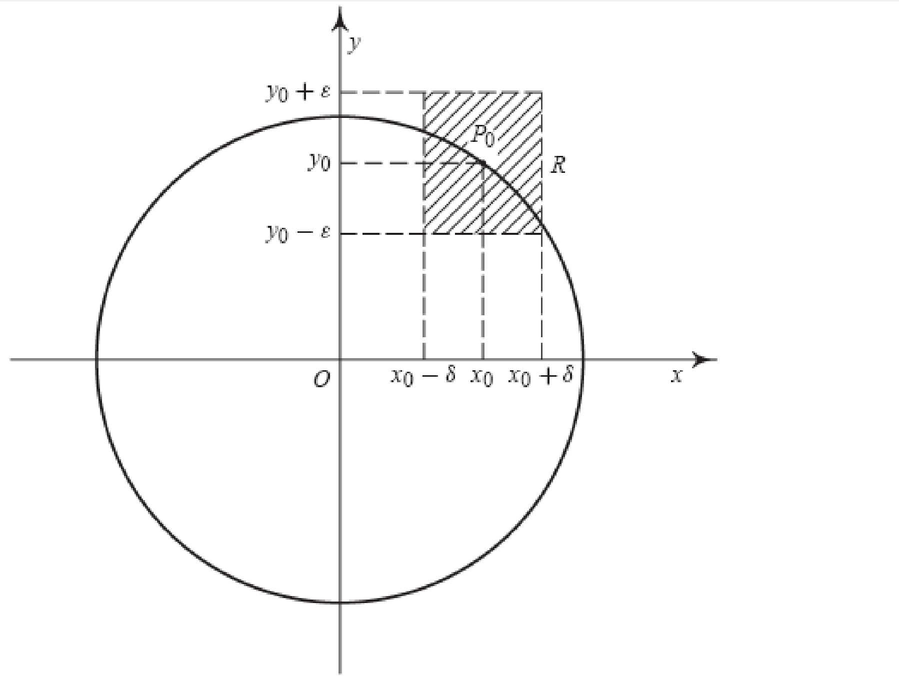
$$M = \{(x, y) \in D_f : F(x, y) = 0\}$$

a nechť pro bod $(x_0, y_0) \in D_f$ platí $F(x_0, y_0) = 0$.
Jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(x_0, y_0)$ bodu (x_0, y_0), $\mathcal{U}(x_0, y_0) \subseteq D_f$ takové, že množina $M \cap \mathcal{U}$ je totožná s grafem funkce $y = f(x)$, pak řekneme, že funkce f je v okolí bodu (x_0, y_0) **implicitně**[a] **definována (určena)** rovnicí $F(x, y) = 0$.

[a]Doslovný český překlad slova implicitní je nerozvinutý, skrytý, v něčem obsažený.

POZNÁMKA 1.14.1

Funkce $y = f(x)$ je tedy v okolí bodu (x_0, y_0) zadána implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $F(x, f(x)) = 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
V případě rovnice kružnice $x^2 + y^2 - 1 = 0$ z obrázku vidíme, že v okolí libovolného bodu $P_0 \neq (\pm 1, 0)$ této kružnice je rovnicí $x^2 + y^2 - 1 = 0$ implicitně zadána funkce $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ pro bod ležící na horní půlkružnici a $y = f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ pro bod ležící na dolní půlkružnici. Dále vidíme, že v okolí bodů $(\pm 1, 0)$ není rovnicí zadána žádná funkce proměnné x.



Obrázek 1.14.1

VĚTA 1.14.1 (Postačující podmínka pro existenci funkce zadané implicitně)

Nechť funkce $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definována a spojitá na čtverci

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in D_f : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta\}$$

a nechť $F(x_0, y_0) = 0$.
Dále nechť funkce F má spojitou parciální derivaci $F'_y(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) a platí $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.
Pak existuje okolí bodu (x_0, y_0), v němž je rovností $F(x, y) = 0$ implicitně definována právě jedna spojitá funkce $y = f(x)$.

POZNÁMKA 1.14.2

1. Podmínka $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ je pouze dostatečnou, nikoliv nutnou podmínkou pro existenci implicitně zadané funkce. Například pro rovnici $y^3 - x = 0$ je $F'_y(0, 0) = 3y^2|_{y=0}$, a přesto je rovnicí v okolí počátku implicitně určena funkce $y = \sqrt[3]{x}$.

2. Na zadávající rovnici $F(x, y) = 0$ se můžeme dívat také jako na rovnici definující funkci $x = \psi(y)$ proměnné y. Dostatečnou podmínkou pro existenci takto implicitně zadané funkce $x = \psi(y)$ v okolí bodu (x_0, y_0) je podmínka $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$.

Příklad 1.14.1: Najděte body křivky $x^2 + 2xy - y^2 - 8 = 0$, v nichž nejsou splněny předpoklady o existenci implicitní funkce.

VĚTA 1.14.2 (Derivace implicitně zadané funkce)

Nechť jsou splněny předpoklady předchozí věty a funkce F má na čtverci $\mathcal{R}$ spojité parciální derivace 1. řádu. Pak má funkce f, která je v okolí bodu (x_0, y_0) implicitně určena rovnicí $F(x, y) = 0$, derivaci v bodě x_0 a platí

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \tag{1.9}$$

POZNÁMKA 1.14.3

Derivaci funkce zadané implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ můžeme spočítat buďto podle vzorce (1.9) anebo podle pravidel pro derivaci složené funkce, to znamená, že rovnici $F(x, y) = 0$ derivujeme podle x a na y se díváme jako na funkci proměnné x. Tento postup je vhodný i při výpočtu vyšších derivací.

Příklad 1.14.2: Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí

a) $xy + \ln y - 1 = 0$ v bodě $(1, 1)$

b) $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ v bodě $(1, 1)$.

Příklad 1.14.3: Určete, ve kterých bodech křivky $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ je tečna rovnoběžná s osou x, resp. y.

Příklad 1.14.4: Zjistěte, zda funkce $y = f(x)$ zadaná implicitně rovnicí $x^4 + y^4 - xy - 1 = 0$ je v bodě $(0, 1)$ rostoucí nebo klesající a konvexní nebo konkávní.

Příklad 1.14.5: Určete lokální extrémy funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí $3x^2 - y^2 + 2xy + x - 3y - \frac{5}{4} = 0$.

1.14.2 Implicitně zadaná funkce dvou proměnných

DEFINICE 1.14.2

Nechť F je funkce tří proměnných, tj. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$M = \{(x, y, z) \in D_f; F(x, y, z) = 0\}$ a nechť pro bod $(x_0, y_0, z_0) \in D_f$ platí $F(x_0, y_0, z_0) = 0$.
Jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(x_0, y_0, z_0)$ bodu (x_0, y_0, z_0), $\mathcal{U}(x_0, y_0, z_0) \subseteq D_f$ takové, že množina $M \cap \mathcal{U}$ je totožná s grafem funkce $z = f(x, y)$, pak řekneme, že funkce f je v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) **implicitně definována (určena)** rovnicí $F(x, y, z) = 0$.

VĚTA 1.14.3 (Postačující podmínka pro existenci funkce zadané implicitně)

Nechť funkce $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je definována a spojitá na množině

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in D_f : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta, |z - z_0| < \delta\}$$

a nechť $F(x_0, y_0, z_0) = 0$.
Dále nechť funkce F má spojitou parciální derivaci $F'_z(x, y, z)$ v bodě (x_0, y_0, z_0) a platí $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.
Pak existuje okolí bodu (x_0, y_0, z_0), v němž je rovností $F(x, y, z) = 0$ implicitně definována právě jedna spojitá funkce $z = f(x, y)$.
Má-li navíc funkce F v bodě (x_0, y_0, z_0) spojité parciální derivace F'_x, F'_y, má implicitně určená funkce f v bodě (x_0, y_0, z_0), parciální derivace a platí

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)},$$

$$f'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Příklad 1.14.6: Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - x - y - z = 0$ v bodě $(1, 0, 1)$.

Příklad 1.14.7: Najděte stacionární body funkce $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ a zjistěte, zda jsou v těchto bodech lokální extrémy.

POZNÁMKA 1.14.4

Analogicky můžeme formulovat větu o existenci a derivaci v případě, kdy je rovnicí $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ v okolí bodu $({x_1}^0, \ldots, {x_n}^0, y_0)$ implicitně určena funkce n proměnných $y = f(x_1, \ldots, x_n)$:
Nechť $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$,
$M = \{(x_1, \ldots, x_n, y) \in D_f : F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\}, ({x_1}^0, \ldots, {x_n}^0, y_0) \in M$ a F je spojitá na množině

$$R = \{(x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x_1 - {x_1}^0| < \delta, \ldots, |x_n - {x_n}^0| < \delta, |y - y_0| < \delta\}.$$

Dále předpokládejme, že F má spojitou parciální derivaci F'_y v bodě $({x_1}^0, \ldots, {x_n}^0, y_0)$ a $\frac{\partial F}{\partial y}({x_1}^0, \ldots, {x_n}^0, y_0) \neq 0$. Pak existuje okolí bodu $({x_1}^0, \ldots, {x_n}^0, y_0)$, v němž je rovnicí $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ implicitně určena právě jedna spojitá funkce $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Má-li navíc funkce F v bodě $({x_1}^0, \ldots, {x_n}^0, y_0)$, spojité parciální derivace $\frac{\partial}{\partial x_i} F, i = 1, \ldots, n$, má implicitně určená funkce f v bodě $({x_1}^0, \ldots, {x_n}^0)$, parciální derivace a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}({x_1}^0, \ldots, {x_n}^0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}({x_1}^0, \ldots, {x_n}^0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}({x_1}^0, \ldots, {x_n}^0, y_0)}.$$

Kapitola 2

NEKONEČNÉ ŘADY

2.1 Nekonečná číselná řada a její součet

Úvod[1]
Teorie nekonečných číselných řad vznikla ve druhé polovině 17. století spolu s utvářením infinitezimálního počtu. Mnohé myšlenky zrály řadu století, než se přiblížily dnešní podobě. V průběhu vývoje se někteří matematikové dopustili při počítání s řadami omylů, zejména v době, kdy nebyl pojem konvergence řady konstituován, a také v době, kdy panovala jakási hrůza z nekonečna. Tímto problémem se od počátku zabývali nejenom matematikové, ale i filozofové.

Například Zenon z Eleje (490−430 př. n. l.) považoval za nemožné, že by nekonečný součet kladných čísel mohl být konečné číslo; připomeňme jeho apórii[2] *Achilles a želva*: „Rychlonohý Achilles nikdy nedožene želvu, jestliže se želva nachází v nějaké vzdálenosti před ním." Se součty nekonečných geometrických řad již pracoval (aniž používal dnešní symboliku) Archimedes (287−212 př. n. l.), když určoval kvadraturu paraboly; první nekonečnou řadu, která nebyla geometrická, sečetl na základě fyzikálních úvah až ve středověku (kolem roku 1350) R. Swineshead.

V celé historii matematiky byla snaha zodpovědět dvě základní otázky pro počítání s nekonečnými číselnými řadami:

Jak sečíst nekonečnou (přesněji spočetnou) množinu čísel?

Platí pro nekonečné součty podobné zákony jako pro konečné součty, zejména zákon distributivní, asociativní a komutativní?

Odpověď na obě otázky ukážeme v průběhu dalších kapitol, které jsou věnovány nekonečným číselným řadám.

[1] Převzato ze skript: Došlá, Z.; Novák, V. Nekonečné číselné řady
[2] slepá ulička rozumu

DEFINICE 2.1.1

Uvažujme nekonečnou číselnou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Výraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

nazýváme *nekonečnou číselnou řadou.* Často používáme zkrácený název *nekonečná řada*, případně *řada.* Sčítanec a_n nazýváme $n-$ tý člen řady. Místo výrazu $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ používáme symbol řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{nebo} \sum a_n.$$

DEFINICE 2.1.2

Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde
$s_1 = a_1$,
$s_2 = a_1 + a_2$,
$\vdots$
$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
$\vdots$
nazýváme *posloupnost částečných součtů* této řady.

Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* a má součet s.

Neexistuje-li vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

POZNÁMKA 2.1.1

- Číslo s_n nazýváme $n-$ tým částečným součtem této řady.
- Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, říkáme, že řada určitě diverguje k $+\infty$.
- Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$, říkáme, že řada určitě diverguje k $-\infty$.
- Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, říkáme, že řada osciluje.

POZNÁMKA 2.1.2

- Má-li konvergentní řada součet s, píšeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$.
- Je-li řada divergentní k $+\infty$, píšeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.
- Je-li řada divergentní k $-\infty$, píšeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

Příklad 2.1.1
Určete součet řady $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$.

Příklad 2.1.2
Vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+2)}$ pomocí určení součtu této řady. Využijte rozkladu členu na parciální zlomky.

2.2 Geometrická řada

DEFINICE 2.2.1

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + \cdots$, kde $q \neq 0 \wedge a_1 \neq 0$ se nazývá *geometrická řada s kvocientem q.*

VĚTA 2.2.1 (Kritérium geometričnosti řady)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada. Platí-li $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, kde q je konstanta, pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je *geometrická řada s kvocientem q.*

Příklad 2.1.3
Zjistěte, zda řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 7 \cdot 2^n \cdot 3^{n-1}$ je geometrická.

VĚTA 2.2.2 (O součtu geometrické řady)

Uvažujme geometrickou řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$. Pro $|q| < 1$ tato řada konverguje a pro její součet platí $S = \frac{a_1}{1-q}$. Pro ostatní q řada diverguje.

Příklad 2.1.4

Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$.

2.3 Obecné vlastnosti řad

VĚTA 2.3.1 (Věta o násobku řad)

Jestliže nekonečná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a má součet S, tak konverguje i nekonečná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$, přičemž platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = c \cdot S.$$

VĚTA 2.3.2 (Věta o součtu řad)

Nechť nekonečné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují, přičemž pro jejich součty platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_2.$$

Potom konverguje i nekonečná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots$$

a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_1 \pm S_2,$$

pokud výrazy na pravých stranách rovnic mají smysl.

Příklad 2.3.1
Určete součet řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 4^n - 3^{n+1}}{6^n}.$$

VĚTA 2.3.3 (Věta o uzávorkování členů řady)

Uvažme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Pak platí:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_r) + (a_{r+1} + a_{r+2} + \cdots + a_s) + (\cdots) + (\cdots) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

pokud součet na pravé straně existuje.

Příklad 2.3.2
Určete součet řady $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{16} + \frac{2}{27} - \frac{1}{64} + \cdots$.

2.4 Kritéria konvergence pro číselné řady

VĚTA 2.4.1 (Nutná podmínka konvergence řady)

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

POZNÁMKA 2.4.1

Opak této věty ale neplatí. Pro konvergenci řady je tato **podmínka nutná nikoliv dostačující**. Věta se dá interpretovat také takto:

$$\textbf{Nechť } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0, \textbf{ pak řada } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textbf{ diverguje}.$$

Tedy, aby řada divergovala je takto koncipovaná věta **postačující podmínkou pro divergenci**.

DEFINICE 2.4.1

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá **řada s nezápornými (kladnými) členy**, je-li $a_n \geq 0$, ($a_n > 0$), pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
Vlastnosti těchto řad:

1. Posloupnost jejich částečných součtů $\{s_n\}$ je neklesající, neboť $s_{n+1} = a_{n+1} + s_n \geq s_n$.
2. Je-li posloupnost $\{s_n\}$ navíc shora ohraničená, pak existuje vlastní $\lim s_n$, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.
3. Řady s nezápornými členy jsou buď konvergentní nebo určitě divergentní k $+\infty$.

VĚTA 2.4.2 (Srovnávací kritérium)

Buďte $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ řady s nezápornými členy a nechť $a_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

1. konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
2. diverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

POZNÁMKA 2.4.2

Jsou-li $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ řady s nezápornými členy a platí-li $a_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$, nazývá se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ **majorantní řadou** k řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **minorantní řadou** k řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Příklad 2.4.1
Pomocí srovnávacího kritéria rozhodněte o konvergenci řad:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}, \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

VĚTA 2.4.3 (Limitní odmocninové kritérium)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Nechť existuje limita

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = L, \qquad L \in \mathbb{R}^*.$$

Pak platí:

1. je-li $L < 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
2. je-li $L > 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje,
3. je-li $L = 1$, pak nelze podle tohoto kritéria rozhodnout.

Příklad 2.4.2
Pomocí limitního odmocninového kritéria rozhodněte o konvergenci řad:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^n}, \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

VĚTA 2.4.4 (Limitní podílové kritérium)

Uvažujme řadu s kladnými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Nechť existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L, \quad L \in \mathbb{R}^*.$$

Pak platí:

1. je-li $L < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
2. je-li $L > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje,
3. je-li $L = 1$, pak nelze podle tohoto kritéria rozhodnout.

Příklad 2.4.3
Pomocí limitního podílového kritéria rozhodněte o konvergenci řad:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}.$$

VĚTA 2.4.5 (Integrální kritérium)

Nechť f je funkce definovaná na intervalu
$< 1, \infty)$, která je na tomto intervalu nezáporná a nerostoucí. Nechť $f(n) = a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Příklad 2.4.4
Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o konvergenci řad:

$$\text{a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}, \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}.$$

2.5 Alternující řady. Leibnizovo kritérium. Absolutně a relativně konvergující řady.

DEFINICE 2.5.1

Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá **alternující**, právě když platí

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n \quad \text{pro všechna} \quad n \in \mathbb{N}.$$

POZNÁMKA 2.5.1

Alternující řady budeme psát ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad \text{nebo ve tvaru} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n,$$

kde $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

VĚTA 2.5.1 (Leibnizovo kritérium konvergence)

Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Pak alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguje právě tehdy, když platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Příklad 2.5.1
Podle Leibnizova kritéria rozhodněte o konvergenci řady

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n+1}{2n-3}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n-\ln n}$.

VĚTA 2.5.2

Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

POZNÁMKA 2.5.2

Opačné tvrzení neplatí, neboť např. Leibnizova řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ je konvergentní, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní. Z toho důvodu zavádíme následující pojem.

DEFINICE 2.5.2

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje absolutně**, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje neabsolutně (relativně)**.

VĚTA 2.5.3

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ je absolutně konvergentní řada. Pak platí $|s| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

VĚTA 2.5.4 (O absolutní konvergenci)

Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, je také konvergentní.

POZNÁMKA 2.5.3

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je řada s nezápornými členy, a proto můžeme při určování absolutní konvergence řad použít stejná kritéria jako v kapitole 2.4.

Příklad 2.5.2
Zjistěte, zda řada

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots$$

konverguje.

Příklad 2.5.3
U zadaných řad rozhodněte o absolutní konvergenci, resp. relativní konvergenci, případně divergenci:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n2^n}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n!}$.