7 Integrální počet funkce jedné proměnné

OBSAH
INDEX
CVIČENÍ

7.1 Úvodní historické poznámky

historie

Z historického hlediska je zajímavé, že první počátky integrálního počtu se objevují už u Archimeda ve starověkém Řecku. Slavný matematik tehdy počítal délky některých křivek, obsahy rovinných obrazců, statické momenty a těžiště některých těles způsobem, který není příliš vzdálený od některých úvah této kapitoly. U zrodu integrálního počtu jako vědecké disciplíny stáli G. W .Lebniz a I. Newton. I. Newton se narodil 4.1.1643 ve Woolsthorpe na východě Anglie. V roce 1661 nastoupil na Trinity College v Cambridgi. V roce 1665 získal hodnost bakaláře a v roce 1668 se stal magistrem. V roce 1669 se stal profesorem na Trinity College a začal přednášet fyziku a matematiku. Jeho největším dílem jsou „Matematické principy přírodní filosofie" (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica) vydané v roce 1687, kde vyložil základní zákony mechaniky. Isaac Newton zemřel ve věku 85 let. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) patřil mezi významné německé filosofy. Nezávisle na Newtonovi objevil diferenciální a integrální počet. K jeho nejdůležitějším dílům z matematiky patří „Metoda maxim a minim" z roku 1684. Srovnáme-li „zhruba" postupy Newtona a Leibnize k dané problematice, Newtonova matematická metodologie má spíše intuitivně-fyzikální pozadí s důrazem na derivaci interpretovanou jako okamžitou rychlost. Jeho notace je však těžkopádná a člověk se může snadno dopustit chyby. Naproti tomu Leibnizův přístup byl preciznější, chápal derivaci geometricky jako směrnici tečny a kromě základních vzorců pro derivování jeho dílo obsahovalo i derivaci součinu. Jak už to bývá, došlo mezi nimi ke sporu o prvenství v objevení diferenciálního a integrálního počtu. Nakonec byli oba dva označeni za zakladatele diferenciálního a integrálního počtu. Je ovšem nutné poznamenat, že oba vědci nepracovali s patřičnou precizností a formálně, logicky i metodologicky se ještě infinitezimální počet dlouho dotvářel. První etapu rozvoje integrálního počtu završili na začátku 18. století bratři Bernoulliové Johann a Jacob.

7.2 Primitivní funkce a neurčitý integrál

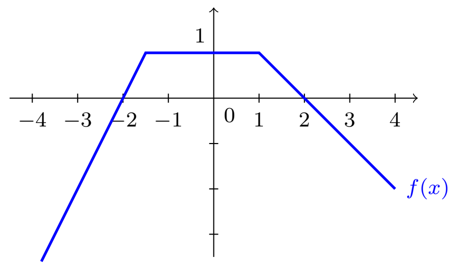
Studijní cíle

1. Umět vysvětlit rozdíl mezi primitivní funkcí a neurčitým integrálem.
2. Pochopit vzájemnou souvislost mezi derivováním a integrováním.
3. Znázornit symbolicky neurčitý integrál a popsat jeho jednotlivé části.
4. Bezpečně ovládat základní vzorce pro integrování funkcí. Všimnout si definičních oborů pro jednotlivé vzorce a umět si je zdůvodnit.

Než se začneme exaktněji zabývat integrálním počtem, měli bychom si uvědomit jisté souvislosti. Jistě jste si všimli, že ústředním pojmem diferenciálního počtu je pojem derivace funkce. Derivace charakterizuje **změnu** sledované veličiny, ne však její samotnou **hodnotu**. Když např. řekneme, že zisk vzrostl o 5 000 Kč, tak nevíme jestli z 10 000 Kč na 15 000 Kč nebo to bylo v rámci jiného intervalu délky 5 000, např z 15 000 Kč na 20 000 Kč. Dodatečný údaj, že jsme měli v té době už zisk 3000 Kč, nám poskytne dostatečnou informaci o celkovém zisku 8 000 Kč.

V konkrétních úlohách se někdy snadněji popíše hodnota sledované veličiny, jindy její změna. Jejich vzájemný vztah je podstatou celé matematické analýzy. Ta se skládá z diferenciálního počtu, který od hodnot veličiny odvozuje její změnu a integrálního počtu, který od změn veličiny odvozuje její hodnotu. Samotný integrální počet se dělí na neurčitý a určitý integrál, přičemž neurčitý integrál se často charakterizuje jako opačný proces k derivování.

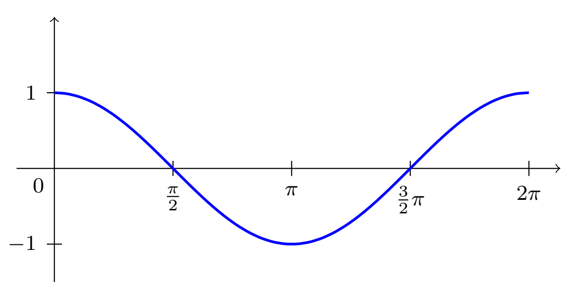
Příklad 7.2.1. Na Obr. 7.2.1 je znázorněn graf funkce $f(x)$, jenž je derivací jisté funkce $F(x)$ (tedy $f(x) = F'(x)$). Pokuste se nalézt graf funkce $F(x)$.



Obr. 7.2.1

Řešení: Ve II. ročníku v předmětu Diferenciální rovnice budeme rovnici $f(x) = F'(x)$ nazývat diferenciální rovnicí. Pokusíme se tuto rovnici znázornit pomocí lineárních elementů. **Lineárním elementem** budeme rozumět trojici $[x, y, f(x, y)]$, budeme ho geometricky interpretovat krátkou úsečkou v bodě $[x, y]$, jež má směrnici rovnou $f(x, y)$. Všimněte si bodů x_0, v nichž graf funkce $f(x) = F'(x)$ protíná osu x, tj. $F'(x_0) = 0$. V těchto bodech by mohly nastat lokální extrémy funkce $F(x)$, neboť všechny lineární elementy na přímce $x = x_0$ jsou rovnoběžné s osou x. Množinu lineárních elementů nazveme **směrové pole rovnice** $f(x) = F'(x)$. V grafu 7.2.1. naleznete pokračování.

Příklad 7.2.2. Na Obr. 7.2.2 je znázorněn graf funkce $f(x) = \cos x$ na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$, jež je derivací jisté funkce $F(x)$, tedy $F'(x) = \cos x$. Pomocí směrového pole se pokuste nalézt graf funkce $F(x)$ na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$.



Obr. 7.2.2: Funkce $\cos x$ na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Řešení: Řešení naleznete v grafu 7.2.2.

primitivní funkce

Definice 7.2.1.

Nechť I je otevřený interval ohraničený nebo neohraničený. Nechť $F(x)$, $f(x)$ jsou funkce definované v intervalu I. Funkce $F(x)$ se nazývá **primitivní funkcí** k funkci $f(x)$ na intervalu I, platí-li

$$F'(x) = f(x).$$

Příklad 7.2.3. Funkce $F(x) = \frac{x^3}{3}$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = x^2$ na intervalu $(-\infty, \infty)$, neboť pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Lemma 7.2.1.

Nechť $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na otevřeném intervalu I. Pak pro libovolné $C \in \mathbb{R}$ je také $F(x)+C$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ na I.

Lemma 7.2.2.

Nechť $F(x)$, $G(x)$ jsou primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu I. Pak existuje takové číslo C, že platí $G(x) = F(x) + C$ identicky na intervalu I.

Z těchto lemmat plyne

Důsledek 7.2.1. Nechť $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na otevřeném intervalu I. Pak množina $\{F(x) + C, C \in \mathbb{R}\}$ je množinou primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na I.

Vraťte se opět k příkladu 7.2.2 a uvědomte si, jak vypadá množina primitivních funkcí v tomto příkladu.

V souvislosti s definicí primitivní funkce se přirozeně naskýtá otázka, zda ke každé funkci definované na nějakém intervalu I existuje na tomto intervalu funkce primitivní. Odpověď je negativní. Postačující podmínku pro existenci primitivní funkce dává následující věta.

Věta 7.2.1 (O existenci primitivní funkce)**.**
Ke každé spojité funkci na otevřeném intervalu I existuje na tomto intervalu funkce primitivní.

Definice 7.2.2.
Primitivní funkce k funkci $f(x)$ se nazývá **neurčitý integrál** funkce $f(x)$ a značí se $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

neurčitý integrál

Poznámka 7.2.1. Symbol $\int$ se nazývá integrálním znakem. Vznikl protažením písmena S, které je prvním písmenem slova $SUMA$ (jak uvidíme později u určitého integrálu - určitý integrál představuje „jistý“ součet neboli Sumu). Funkci $f(x)$ nazýváme **integrandem**. Symbol dx budeme formálně chápat jako jakousi „tečku“, která uzavírá zápis integrálu a navíc nás informuje o tom, že nezávisle proměnná u funkce, kterou integrujeme, je označena písmenem x.

$$\underbrace{\int}_{\textbf{symbol}} \underbrace{f(x)}_{\textbf{integrand}} \underbrace{\mathrm{d}x}_{\substack{\textbf{označení proměnné} \\ \textbf{diferenciál} \\ \textbf{formální tečka v zápisu}}}$$

Obr. 7.2.3: Neurčitý integrál

Poznámka 7.2.2. Podle lemmat 7.2.1, 7.2.2 není integrál určen jednoznačně, nýbrž je určen až na aditivní konstantu, tj. je-li $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$, pak množinu všech primitivních funkcí k funkci f, tj. neurčitý integrál, formálně označujeme jednou primitivní funkcí $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$. Písmeno C v předešlém zápisu se nazývá **integrační konstanta**.

Podle definice 7.2.1 platí

$$\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right] = f(x).$$

To znamená, že derivujeme-li integrál, dostaneme po provedení derivace integrand. Rovněž

$$\int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C,$$

tj. derivace a integrace jsou komplementární (doplňkové) operace.

Odtud plyne, že velmi snadno můžeme získat základní vzorce pro integrování funkcí ze známých vzorců z diferenciálního počtu. Např.

$$[\sin x]' = \cos x \quad \Rightarrow \quad \int [\sin x]' \,\mathrm{d}x = \int \cos x \,\mathrm{d}x,$$

ale také

$$\int [\sin x]' \,\mathrm{d}x = \sin x + C, \quad \text{tj.} \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C.$$

Klíčová slova

primitivní funkce, neurčitý integrál, integrální znak, integrand

7.3 Základní vzorce pro integrování funkcí

1. $\displaystyle\int 0 \,\mathrm{d}x = C,$
2. $\displaystyle\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1,$

   Vzorec 2. platí v intervalech: $(-\infty, \infty)$ pro $n \geq 0,\ n \in \mathbb{Z}$,
   $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ pro $n < 0,\ n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$,
   $(0, \infty)$ pro $n \in \mathbb{R} - \{-1\}$,
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C,$ platí v $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$,
4. $\displaystyle\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C,$ platí v $(-\infty, \infty)$,
5. $\displaystyle\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C,$ platí v $(-\infty, \infty)$,
6. $\displaystyle\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C,$ platí v $(-\infty, \infty)$,
7. $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C,$ platí v $(-\infty, \infty)$,
8. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$ platí v $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left((2k-1)\tfrac{\pi}{2}, (2k+1)\tfrac{\pi}{2}\right)$,
9. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C,$ platí v $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$,
10. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C,$ platí v $(-\infty, \infty)$,
11. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{arccotg} x + C,$ platí v $(-\infty, \infty)$,

12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C,$ platí v $(-1, 1)$,

13. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\arccos x + C,$ platí v $(-1, 1)$,

Vzorce 14., 15. platí v libovolném intervalu, v němž jsou příslušné funkce definovány.

14. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C,\ (a \in \mathbb{R},\ a \neq 0),$

15. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C,$

Vzorce 10., 12. je výhodné si zapamatovat v níže uvedeném obecnějším tvaru (o správnosti vzorců se můžete přesvědčit derivováním pravé strany níže uvedených vzorců).

16. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$ platí v $(-\infty, \infty)$,

17. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$ platí v $(-a, a)$.

Tabulka 7.3.1: Základní vzorce pro integrování funkcí

Jak později zjistíte, při použití složitějších integračních metod se snažíme o úpravu integrandu v integrálu tak, abychom získali některý z výše uvedených základních vzorců. Proto je naprosto nutné umět všechny základní vzorce nazpaměť .

7.4 Základní integrační metody

Studijní cíle

1. Zvládnout základní pravidla pro integrování:
   - integrace součinu konstanta krát funkce
   - integrace součtu funkcí
   - integrace rozdílu funkcí
2. Pochopit správně integrační metodu nazvanou integrace rozkladem.

3. Principiálně zvládnout integraci součinu dvou funkcí – metodu per partes.
4. Vyjmenovat známé typy součinů funkcí, které lze integrovat metodou per partes, včetně stanovení volby funkcí.
5. Umět vysvětlit na příkladech oba dva způsoby použití substituční metody.

V předcházejícím odstavci jsme si uvedli základní vzorce pro integrování. Jde nám ovšem o to, abychom dovedli integrovat co největší třídu funkcí, což je úkol podstatně obtížnější než derivování funkcí. V podstatě si probereme tři základní integrační metody

a) metodu rozkladem,

b) metodu perpartes,

c) metodu substituční.

7.4.1 Metoda rozkladem

Věta 7.4.1 (integrace konstanta násobená funkcí)**.** Existuje-li v intervalu I neurčitý integrál funkce $f(x)$, existuje v tomto intervalu i neurčitý integrál $c \cdot f(x)$, kde $c \in \mathbb{R}$ a platí

$$\int c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 7.4.2 (integrace součtu funkcí)**.** Existují-li v intervalu I neurčité integrály funkcí $f(x)$ a $g(x)$, existuje v tomto intervalu i neurčitý integrál funkce $f(x) + g(x)$ a platí

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důsledek 7.4.1. Existují-li v intervalu I neurčité integrály funkcí $f_1(x)$, $f_2(x), f_3(x), \dots,\ f_n(x)$ a jsou-li $c_1, c_2, \dots, c_n$ libovolná reálná čísla, pak existuje v tomto intervalu i neurčitý integrál funkce $c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot f_2(x) + \cdots +$

$c_n \cdot f_n(x)$ a platí

$$\int \big(c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot f_2(x) + \cdots + c_n \cdot f_n(x)\big)\,\mathrm{d}x =$$
$$= c_1 \cdot \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \cdot \int f_2(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + c_n \cdot \int f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Užitím Důsledku 7.4.1 a základních vzorců pro integrování je možné již počítat neurčité integrály jednoduchých funkcí (metoda rozkladem). Ukážeme to na následujících příkladech.

Příklad 7.4.1. Vypočtěte, pokud existuje, integrál $\int \left(4x^3 - 2x + \dfrac{7}{x}\right)\mathrm{d}x$.

Řešení: Označíme-li

$$f_1(x) = x^3,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = \frac{1}{x},\ c_1 = 4,\ c_2 = -2,\ c_3 = 7,$$

pak podle Důsledku 7.4.1 dostaneme

$$\int \left(4x^3 - 2x + \frac{7}{x}\right)\mathrm{d}x = 4 \cdot \int x^3\,\mathrm{d}x - 2 \cdot \int x\,\mathrm{d}x + 7 \cdot \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= x^4 - x^2 + 7 \cdot \ln|x| + C.$$

Integrál existuje pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

V softwaru `Mathematica` spočítáme zadaný integrál takto:
`Integrate[4x^3-2x+7/x,x]` .
Pozor na výsledek, v `Mathematice` se ve výsledku objeví funkce `Log[x]`. Tzn., že integrál by měl existovat pouze pro $x > 0$, ale tak tomu není. Dokážete zderivovat funkci $\ln|x|$?

Příklad 7.4.2. Vypočtěte $\int \dfrac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1 + 3\sqrt{x} + 3x + \sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + 3 \cdot \int \mathrm{d}x +$$
$$+ 3 \cdot \int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + \int x\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + 3x + 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C.$$

Integrál existuje pro $x \in (0, \infty)$.

Příklad 7.4.3. Vypočtěte $\int \left(\operatorname{tg}^2 x + \frac{2}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\begin{aligned}\int \left(\operatorname{tg}^2 x + \frac{2}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + 2\cdot\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + 2\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x + 2\operatorname{arctg} x = \\ &= \operatorname{tg} x - x + 2\operatorname{arctg} x.\end{aligned}$$

Integrál existuje v každém intervalu, v němž je funkce tangens definována (viz vzorec 8.).

Příklad 7.4.4. Vypočítejte integrály z předchozích příkladů pomocí softwaru `Mathematica` jako kontrolu výpočtů.

7.4.2 Metoda per partes

Motivace

Rádi bychom spočítali následující integrál $\int f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$ - tedy integrál ze součinu funkcí. Např. integrál ze součtu funkcí se rovná součtu integrálů z těchto funkcí, viz věta 7.4.2. Nešlo by to podobně? Tj. integrál ze součinu funkcí se rovná součinu integrálů z těchto funkcí? Asi ne, protože integrace je opačný postup k derivaci a derivace součinu funkcí se nerovná součinu derivací těchto funkcí, nýbrž

$$\big(u(x)\cdot v(x)\big)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

Vyjděme tedy z tohoto vzorce a zkusme celou rovnici zintegrovat. Zřejmě platí:

$$\begin{aligned}\int \big(u(x)\cdot v(x)\big)'\,\mathrm{d}x &= \int \big(u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)\big)\,\mathrm{d}x \\ u(x)\cdot v(x) &= \int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Na pravé straně v poslední rovnici máme již integrand ve dvou integrálech ve tvaru součinu dvou funkcí. Zkusme vyjádřit jeden z nich, např.

$$\int u'(x) \cdot v(x) \, \mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) \, \mathrm{d}x.$$

Aby integrály existovaly, bude nutné, aby příslušné integrandy byly spojité funkce podle věty 7.2.1. K tomu stačí, aby funkce měly spojité derivace. Nyní už můžeme zformulovat větu, kterou nazýváme Integrací per partes (po částech). Později vysvětlíme, co rozumíme pod slovním spojením per partes.

Věta 7.4.3 (Integrací per partes (po částech))**.**
Nechť funkce $u(x)$, $v(x)$ mají v intervalu I spojité derivace $u'(x)$, $v'(x)$. Pak v I platí

$$\int u'(x) \cdot v(x) \, \mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) \, \mathrm{d}x. \tag{7.4.1}$$

Poznámka 7.4.1. Integraci součinu funkcí $u(x) \cdot v(x)$ nelze tedy počítat tak, že by se výpočet $\int u(x) \cdot v(x) \, \mathrm{d}x$ dal převést na výpočet $\int u(x) \, \mathrm{d}x \cdot \int v(x) \, \mathrm{d}x$, ale v některých případech je možné použít Věty 7.4.3. Je ovšem nutné si uvědomit, že integrand musíme vytvořit jako součin dvou funkcí, z nichž první označíme $u'(x)$ a druhou $v(x)$. Metoda per partes se používá dvěma způsoby. V prvním způsobu použití per partes volíme funkce tak, aby docházelo k postupnému zjednodušování integrandu až se dostaneme k některému ze základních vzorců pro integrování. Zřejmě tedy bude záležet na vhodné volbě funkcí $u'(x)$ a $v(x)$. Postup pochopíte z následujících příkladů. Po vypočítání příkladů vysvětlíme druhý způsob použití metody per partes.

Příklad 7.4.5. Vypočtěte $\displaystyle\int x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x$.

Řešení: Položíme $u'(x) = \cos x$, $v(x) = x$ a k nim vypočteme $u(x) = \sin x$, $v'(x) = 1$. Dosadíme do rovnice (7.4.1)

$$\int x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = x \cdot \sin x - \int \sin x \, \mathrm{d}x = x \sin x + \cos x + C.$$

Příklad 7.4.6. Vypočtěte $\displaystyle\int x^3 \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$.

Řešení: Položme $u'(x) = \mathrm{e}^x$, $v(x) = x^3$.

$$\int x^3 \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u'(x) = \mathrm{e}^x & v(x) = x^3 \\ u(x) = \mathrm{e}^x & v'(x) = 3x^2 \end{array} \right| = x^3\mathrm{e}^x - 3\int x^2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x.$$

Opět aplikujeme na poslední integrál metodu per partes:

$$\int x^3 \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u'(x) = \mathrm{e}^x & v(x) = x^2 \\ u(x) = \mathrm{e}^x & v'(x) = 2x \end{array} \right| = x^3\mathrm{e}^x - 3\left(x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x\right).$$

Ještě jednou použijeme metody per partes na $\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned} \int x^3 \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u'(x) = \mathrm{e}^x & v(x) = x \\ u(x) = \mathrm{e}^x & v'(x) = 1 \end{array} \right| &= x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + \\ + 6\left(x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x\right) &= x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6x\mathrm{e}^x - 6\mathrm{e}^x + C = \\ &= \mathrm{e}^x \cdot (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C \end{aligned}$$

Poznámka 7.4.2. Zvláště z druhého příkladu by nám mělo být jasné, proč se tato metoda nazývá metoda per partes (po částech). Jistě jste si všimli, že jsme integrál $\int x^3\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ postupně zjednodušovali ($\int x^2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$, $\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$, $\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$), až jsme dostali integrál $\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$, který dovedeme spočítat podle základního vzorce 4. Tedy jsme vlastně zadaný integrál počítali po částech. Dále si uvědomme, že jsme této metody použili třikrát za sebou a že tedy ji zřejmě můžeme použít libovolněkrát za sebou. Další způsob použití metody per partes si vysvětlíme v následujících příkladech. Půjde o to, že při integraci metodou per partes se po jednom (příklad 7.4.7) nebo vícenásobném (příklad 7.4.8) použití této metody vyskytne na pravé straně rovnice integrál, který je totožný s integrálem na levé straně rovnice. Stačí tedy vyřešit tuto rovnici pro hledaný integrál.

Příklad 7.4.7. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Často píšeme pouze u místo $u(x)$ a v místo $v(x)$ v rovnici (7.4.1). Položme $u' = \frac{1}{x}$ a $v = \ln x$.

$$\int \frac{\ln x}{x} \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \frac{1}{x} & v = \ln x \\ u = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} \,\mathrm{d}x$$

Po úpravě vzniklé rovnice dostaneme $2 \cdot \int \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x = \ln^2 x$. Vydělíme dvěma a dostaneme tento výsledek: $\int \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$.

Příklad 7.4.8. Vypočtěte $\int \mathrm{e}^{ax} \sin bx \, \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin bx \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^{ax} & v = \sin bx \\ u = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} & v' = b \cos bx \end{array} \right| = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} \sin bx -$$

$$- \frac{b}{a} \int \mathrm{e}^{ax} \cos bx \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^{ax} & v = \cos bx \\ u = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} & v' = -b \sin bx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int \mathrm{e}^{ax} \sin bx \, \mathrm{d}x \right) =$$

$$= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{ax} \cos bx - \frac{b^2}{a^2} \int \mathrm{e}^{ax} \sin bx \, \mathrm{d}x$$

Odtud již známým obratem vypočítáme neznámý integrál ze vzniklé rovnice:

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \cdot \int \mathrm{e}^{ax} \sin bx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} \left(\sin bx - \frac{b}{a} \cos bx \right)$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin bx \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{ax} \left(\frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \right).$$

Další text je určen zájemcům o hlubší studium matematiky. Metoda per partes se dá také použít k odvozování takzvaných rekurentních formulí. Jedná se o to, že při výpočtu integrálu typu $\int f^n(x) \, \mathrm{d}x$ odvodíme rekurentní formuli, pomocí níž lze exponent n snížit. Postupným aplikováním této formule převedeme daný integrál na jednodušší. V následujících příkladech odvodíme rekurentní formule pro výpočet integrálů $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$, $\int \sin^n x \, \mathrm{d}x$.

Příklad 7.4.9. Odvoďte rekurentní formuli pro výpočet integrálů typu $K_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$.

Řešení:

$$K_n = \int 1 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} = \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & v = \frac{1}{(x^2+1)^n} \\ u = x & v' = -\frac{2nx}{(x^2+1)^{n+1}} \end{array} \right| = \frac{x}{(x^2+1)^n} +$$

$$+ 2n \cdot \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \cdot \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \cdot \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} - 2n \cdot \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n+1}} =$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \cdot K_n - 2n \cdot K_{n+1},$$

odtud plyne

$$K_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} K_n + \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^n}, \quad \text{přičemž} \quad K_1 = \operatorname{arctg} x.$$

Příklad 7.4.10.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3} = K_3 = \frac{3}{4}K_2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + \frac{3}{8} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2} + C$$

Příklad 7.4.11. Odvoďte rekurentní (redukční) vzorec $I_n = \int \sin^n x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$I_n = \int \sin x \cdot \sin^{n-1} x = \left| \begin{array}{ll} u' = \sin x & v = \sin^{n-1} x \\ u = -\cos x & v' = (n-1) \cdot \sin^{n-2} x \cdot \cos x \end{array} \right| =$$

$$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \cdot \int \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x \ + (n-1) \cdot \int \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x - (n-1) \cdot \int \sin^n x\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x \ + (n-1) \cdot I_{n-2} - (n-1) \cdot I_n.$$

Odtud

$$I_n = -\frac{1}{n} \cdot \cos x \cdot \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2} = \frac{1}{n}\big((n-1)I_{n-2} - \cos x \sin^{n-1} x\big).$$

Příklad 7.4.12.

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \,\mathrm{d}x = I_4 &= -\frac{1}{4}\cdot\cos x\cdot\sin^3 x + \frac{3}{4}\cdot I_2 = \\ &= -\frac{1}{4}\cdot\cos x\cdot\sin^3 x + \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos x\cdot\sin x + \frac{1}{2}\cdot\int \mathrm{d}x\right) = \\ &= -\frac{1}{4}\cdot\cos x\cdot\sin^3 x + \frac{3}{8}\cdot(x - \sin x\cos x)\end{aligned}$$

Poznámka 7.4.3. Analogicky se odvodí rekurentní vzorec

$$I_n = \int \cos^n x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\big((n-1)I_{n-2} + \cos^{n-1} x \sin x\big).$$

Poznámka 7.4.4. Jistě jste si uvědomili, že v obecnějších případech se nemusí podařit zadané integrály, přestože jejich integrand je součinem dvou funkcí, pomocí metody per partes vypočítat.

Stojí před námi tedy tato otázka: Dovedli bychom vyjmenovat typy integrálů, u nichž si budeme jisti, že se dají metodou per partes vždy vypočítat? Odpověď najdete v následujícím odstavci.

Některé typy integrálů řešitelných metodou per partes

Nechť $P(x)$ značí nějaký polynom.

(I) $\int P(x)\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$ – položíme $u' = \mathrm{e}^{ax}$, $v = P(x)$ (viz Př. 7.4.6),

(II) $\int P(x)\sin ax\,\mathrm{d}x$, $\int P(x)\cos ax\,\mathrm{d}x$ – položíme $u' = \sin ax$ ($u' = \cos ax$), $v = P(x)$ (viz Př. 7.4.5),

(III) $\int P(x)\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$ – položíme $u' = P(x)$, $v = \operatorname{arctg} x$,

(IV) $\int x^k \ln^n x\,\mathrm{d}x$, $k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ – položíme $u' = x^k$, $v = \ln^n x$.

Příklad 7.4.13. Vypočtěte $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x &= \left|\begin{matrix} u' = 1 & v = \operatorname{arctg} x \\ u = x & v' = \frac{1}{1+x^2}\end{matrix}\right| = \\ &= x\cdot\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\cdot\int\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\end{aligned}$$

V příkladu 7.4.13 jsme provedli dva triky. Jednak jsme „vsunuli jedničku“ do integrandu na začátku výpočtu (učinili jsme tak i v příkladu 7.4.9) a za druhé jsme v posledním integrálu „doplnili“ do čitatele derivaci jmenovatele. To proto, abychom mohli použít vzorec 15 ze základních vzorců pro integrování.

Příklad 7.4.14. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln^2 x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = x^{-\frac{1}{2}} & v = \ln^2 x \\ u = 2\sqrt{x} & v' = 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \end{array} \right| = \\
&= 2\sqrt{x}\ln^2 x - 4 \cdot \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = x^{-\frac{1}{2}} & v = \ln x \\ u = 2\sqrt{x} & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = \\
&= 2\sqrt{x}\ln^2 x - 4 \cdot \left(2\sqrt{x}\ln x - 2 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \right) = \\
&= 2\sqrt{x}\ln^2 x - 8\sqrt{x}\ln x + 16\sqrt{x} + C
\end{aligned}
$$

7.4.3 Substituční metoda I

Metoda integrace substitucí je založena na větě o derivaci složené funkce. Jsou-li splněny předpoklady věty o derivaci složené funkce, pak na daném intervalu platí

$$\big(F(g(x))\big)' = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Funkce $F(g(x))$ je tedy primitivní k funkci $f(g(x))g'(x)$ v daném intervalu. Představme si, že chceme vypočítat integrál $\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$, tedy určit funkci $F(g(x))$. Jistě by vás mohlo napadnout, že bychom mohli integrand $f(g(x))g'(x)$ zjednodušit vhodnou volbou náhrady (substitucí) funkce $g(x)$ jednoduchou proměnnou např. t, tj. $g(x) = t$. Co bychom tím získali? Kdybychom ještě tuto rovnici diferencovali, tj. $g'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, získali bychom po těchto úpravách už na první pohled poměrně jednoduchý integrál:

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Protože jsme předpokládali, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f, máme $\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)$ a po zpětném dosazení zvolené substituce dostaneme $\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) = F(g(x))$, tedy hledanou složenou funkci.

Pokud jste správně pochopili tento text, tak by vám mělo být jasné, že v integrandu byste měli „vidět“ derivaci nějaké složené funkce, což by se dalo vyjádřit také tak, že v integrandu uvidíte derivaci vnitřní funkce, která je obsažena v této složené funkci. Pak tato vnitřní funkce je vhodnou funkcí pro hledanou substituci. Jedna malá poznámka, derivace vnitřní funkce se může lišit od funkce $g'(x)$ v integrandu o násobení konstantou, neboť ta se dá snadno vytknout před integrál.

V následujících příkladech zkuste poznat, zda se bude jednat o kandidáty na výpočet integrálů touto substituční metodou. V případě, že je možné integrály vyřešit substituční metodou, učiňte tak.

Příklad 7.4.15. Vypočtěte

a) $\displaystyle\int \sin^5 x \cos x \,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x,\ x \in (-1,1)$,

c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}}\,\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^3+5}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

a) $$\int \sin^5 x \cos x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{lcccl} \text{Substituce:} & g(x) & = & \sin x & = t \\ & g'(x)\mathrm{d}x & = & \cos x \,\mathrm{d}x & = \mathrm{d}t \end{array} \right| =$$
$$= \int t^5 \,\mathrm{d}t = \frac{t^6}{6} = \frac{\sin^6 x}{6} + C.$$

b) $$\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} \arcsin x & = & t \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} =$$
$$= \frac{\arcsin^3 x}{3} + C.$$

c) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} x^3+5 & = & t \\ 3x^2\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right|$$

Oproti předchozím příkladům není získaný diferenciál $3x^2\,\mathrm{d}x$ v integrandu úplný. Liší se ale pouze o násobek konstantou 3, tzn., že můžeme bez obav provést následující úpravy zadaného integradu a až pak zavést substituci

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2}{\sqrt{x^3+5}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\int \frac{3x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+5}} \overset{\text{subst.}}{=} \frac{1}{3}\cdot\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3+5} + C.$$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^3+5}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} x^3+5 & = & t \\ 3x^2\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right|$

Zavedli jsme stejnou substituci jako v příkladě c), ale získaný diferenciál nejen že není v integrandu, ale integrand ani nelze upravit na vhodný tvar, jako tomu bylo předtím. Tento příklad není vhodný na substituční metodu.

Příklad 7.4.16.

a) Vypočítejte příklad 7.4.15 c) pomocí substituce $t = \sqrt{x^3+5}$.

b) Vypočítejte příklad 7.4.15 d) pomocí softwaru `Mathematica`.

Často při praktickém počítání využíváme tzv. lineární substituce.

Příklad 7.4.17. Dokažte:

$$\text{Je-li } \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x), \text{ pak } \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{F(ax+b)}{a} + C.$$

Důkaz $\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} ax+b & = & t \\ a\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x & = & \frac{\mathrm{d}t}{a} \end{array} \right| = \frac{1}{a}\cdot\int f(t)\,\mathrm{d}t =$

$$= \frac{1}{a}\cdot F(t) = \frac{F(ax+b)}{a} + C.$$

Pomocí lineární substituce píšeme přímo výsledky v následujících integrálech:

$$\int \sin(5x-3)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(5x-3)}{5} + C, \qquad \int \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{4x}}{4} + C,$$

$$\int \frac{1}{3-x}\mathrm{d}x = -\ln|3-x| + C, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(3x-2)^2}} = \frac{\arcsin(3x-2)}{3} + C,$$

$$\int \frac{1}{1+(2x+8)^2}\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{arctg}(2x+8)}{2} + C.$$

Příklad 7.4.18. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$.

Řešení: Budeme integrovat podle vzorce 16, neboť polynom x^2+x+1 je nerozložitelný kvadratický polynom ($D = -3 < 0$). Je nutné se zbavit

„nepříjemného“ x ze jmenovatele. To uděláme obratem, kterému se říká doplnění na čtverec, takto:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

a dále integrujeme podle vzorce 16. S použitím lineární substituce příklad rychle dopočítáme:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x + 1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = $$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3} + C.$$

Poznámka 7.4.5. Obratu „doplnění na čtverec“ se často využívá i v příkladech typu $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $a \neq 0$ vedoucích na vzorce 14 nebo 17.

7.4.4 Substituční metoda II

Druhý typ substituční metody spočívá v tom, že místo původní proměnné x dosadíme vhodnou funkci, např. $x = \varphi(t)$, a rovnici diferencujeme: $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$. Místo primitivní funkce k funkci $f(x)$ hledáme pak primitivní funkci k funkci $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Skutečně, je-li $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$, pak derivací složené funkce $G(t) = F(\varphi(t))$ dostaneme

$$G'(t) = F'[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) = g(t).$$

Za t do výsledné funkce $G(t)$ dosadíme $t = \varphi^{-1}(x)$.

Příklad 7.4.19. Vypočtěte $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$ v intervalu $(-a, a)$.

Řešení: Zavedeme substituci $\begin{aligned} x &= a \cdot \sin t \\ \mathrm{d}x &= a \cdot \cos t \cdot \mathrm{d}t, \end{aligned}$ odtud pro zpětné dosazení $t = \arcsin \frac{x}{a}$:

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x &\overset{\text{subst.}}{=} \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t \,\mathrm{d}t = \\
&= \int \sqrt{a^2 \cdot (1 - \sin^2 t)} \cdot a \cos t \,\mathrm{d}t = a^2 \cdot \int \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t \,\mathrm{d}t = \\
&= a^2 \cdot \int \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2} \cdot \int (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} a^2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{2} a^2 (t + \sin t \cos t) = \frac{1}{2} a^2 (t + \sin t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t}) = \\
&= \frac{1}{2} a^2 \cdot \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)
\end{aligned}
$$

Poznámka 7.4.6. Snad jste si všimli, že jsme v předchozím příkladě použili $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ namísto obecně platného vztahu $\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$. Zavedli jsme totiž substituci $x = a \cdot \sin t$ pro $x \in (-a, a)$. Když proměnná x je z intervalu $(-a, a)$, pak proměnná t musí padnout do intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Funkce $\cos t$ je na tomto intervalu nezáporná a tedy platí $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$.

Jistě jste si uvědomili, že princip obou substitučních metod je stejný, je založený na použití pravidla pro derivaci složené funkce.

Použití substituční metody II je mnohem obtížnější. Autoři nepředpokládají, že se ve cvičeních setkáte s příklady vedoucími na použití substituční metody II. Pokud ano, bude vám substituce učiteli doporučena.

Klíčová slova

integrace rozkladem, integrace metodou per partes, substituční metoda

7.5 Integrace racionálních funkcí

Studijní cíle

1. Umět vysvětlit pojmy:
   - racionální funkce
   - racionální funkce ryze lomená

- parciální zlomky
- neryze lomená racionální funkce.

2. Teoreticky i prakticky zvládnout integraci parciálních zlomků.

3. Prakticky provádět bezchybně rozklad racionální funkce ryze lomené na parciální zlomky. Uvědomit si složitost problému.

4. Pochopit převod racionální funkce neryze lomené na racionální funkci ryze lomenou a celistvou (polynom), tj. dělení polynomu polynomem.

5. Zvládnout v jednodušších příkladech praktický výpočet integrálů z racionálních funkcí ryze a neryze lomených.

V kapitole 3 jsme se setkali s pojmy racionální funkce, racionální funkce ryze lomená a racionální funkce neryze lomená. Zopakujte si definici 3.6.1 a větu 3.6.3. Než přistoupíme k určování primitivní funkce k funkci racionální lomené obecně, omezíme se na speciální případy racionálních funkcí ryze lomených, tzv. parciálních zlomků. Pod pojmem **parciální zlomek** rozumíme racionální funkci ryze lomenou zapsanou v jednom z těchto tvarů:

parciální zlomek

$$1)\ y = \frac{A}{(x-\alpha)^n}, \qquad 2)\ y = \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n},$$

přičemž kvadratická rovnice $x^2 + px + q = 0$ nemá reálné kořeny, tj. diskriminant $p^2 - 4q < 0$.

Jak ukážeme později, každou racionální funkci ryze lomenou lze rozepsat na součet parciálních zlomků těchto dvou typů. Proto pro integraci racionálních funkcí lomených stačí ovládat integraci těchto zlomků. V dalším textu uvidíte, jak budeme při této integraci používat substituční metodu uvedenou v předcházejícím odstavci.

7.5.1 Integrace parciálních zlomků

1) Pro integraci funkce $y = \dfrac{A}{(x-\alpha)^n}$ použijeme lineární substituci (viz příklad 7.4.17). Položme $x - \alpha = t$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, pak

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^n}\,\mathrm{d}x = A \cdot \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \begin{cases} A \cdot \dfrac{t^{-n+1}}{-n+1} = \dfrac{A}{1-n} \cdot \dfrac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} & \text{pro } n \neq 1, \\ A \cdot \ln|t| = A \cdot \ln|x-\alpha| & \text{pro } n = 1. \end{cases}$$

2) Uvažujeme případ, kdy má kvadratická rovnice $x^2 + px + q = 0$ kořeny komplexně sdružené $x_{1,2} = a \pm bi$. Výraz $x^2 + px + q$ můžeme nahradit výrazem $(x-a)^2 + b^2$ (víte proč?) a budeme integrovat funkci $y = \frac{Bx+C}{((x-a)^2+b^2)^n}$. V obecném případě je ale výpočet integrálu z této funkce poměrně složitý. Zkusíme si to proto nejprve trochu zjednodušit. Předpokládejme, že mocnitel n v integrandu se rovná 1. Tedy chceme integrovat funkci $\frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}$. Kdyby se v čitateli zlomku nevyskytovala proměnná x, tj. kdyby $B = 0$, pak by integrace zlomku vedla po lineární substituci $x - a = t$ na vzorec 16. Předpokládejme, že $B \neq 0$. Postup v tomto případě bude následující:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{Bx}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{C}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{B}{2} \cdot \int \frac{2(x-a)+2a}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{C}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{B}{2} \cdot \int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}x + B \cdot \int \frac{a}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{C}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{B}{2} \cdot \int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{a \cdot B + C}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{B}{2} \cdot \ln\left|(x-a)^2+b^2\right| + \frac{aB+C}{b} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x-a}{b}.
\end{aligned}$$

Jak jste jistě poznali, úpravami jsme se snažili dosáhnout toho, abychom první integrál mohli integrovat podle vzorce č. 15 a druhý s využitím lineární substituce podle vzorce 16.

Pro vážné zájemce ukážeme, jak bychom integrál $\displaystyle\int \frac{Bx+C}{((x-a)^2+b^2)^n}\,\mathrm{d}x$ vypočítali v případě, kdy $n \neq 1$. Postup bude trochu náročnější. Využijeme nejprve předchozích úprav

$$\int \frac{Bx+C}{((x-a)^2+b^2)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{2} \cdot \int \frac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^n}\,\mathrm{d}x + \int \frac{a \cdot B + C}{((x-a)^2+b^2)^n}\,\mathrm{d}x.$$

V prvním integrálu zavedeme substituci $(x-a)^2 + b^2 = t$, $2(x-a)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ a obdržíme

$$\begin{aligned}
\frac{B}{2} \cdot \int \frac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{2} \cdot \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \frac{B}{2} \cdot \frac{t^{-n+1}}{-n+1} = \\
= \frac{B}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{((x-a)^2+b^2)^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Ve druhém integrálu zavedeme substituci $x-a=b\cdot t$, $\mathrm{d}x=b\cdot\mathrm{d}t$ a dostaneme

$$\int \frac{a\cdot B+C}{((x-a)^2+b^2)^n}\,\mathrm{d}x=(aB+C)\cdot\int\frac{b\cdot\mathrm{d}t}{(b^2t^2+b^2)^n}=$$
$$=\frac{aB+C}{b^{2n-1}}\cdot\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}=\frac{aB+C}{b^{2n-1}}\cdot K_n$$

při označení K_n z příkladu 7.4.9, kde jsme odvodili rekurentní formuli

$$K_{n+1}=\frac{2n-1}{2n}K_n+\frac{1}{2n}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^n}.$$

Na základě této formule již dovedeme integrál spočítat. Musíme ale poznamenat, že příklady vedoucí na tento vzorec se nebudou ve zkouškových písemkách pro studenty FAI oboru IŘT vyskytovat.

Příklad 7.5.1. Vypočtěte $\displaystyle\int\frac{3}{(4x-5)^3}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int\frac{3}{(4x-5)^3}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{rcl} t&=&4x-5\\ \mathrm{d}t&=&4\mathrm{d}x\end{array}\right|=\frac{3}{4}\cdot\int\frac{4\,\mathrm{d}x}{(4x-5)^3}\overset{\text{subst.}}{=}\frac{3}{4}\cdot\int\frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t=$$
$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}=-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{(4x-5)^2}+C$$

Příklad 7.5.2. Vypočtěte $\displaystyle\int\frac{5x+2}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int\frac{5x+2}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x=5\cdot\int\frac{x+\frac{2}{5}}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\cdot\int\frac{2\cdot\left(x+\frac{2}{5}\right)}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\frac{5}{2}\cdot\int\frac{2x+\frac{4}{5}+2-2}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\cdot\int\frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x+$$
$$+\frac{5}{2}\cdot\int\frac{-\frac{6}{5}}{x^2+2x+1+9}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\cdot\int\frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x+$$
$$+\frac{5}{2}\cdot\int\frac{-\frac{6}{5}}{(x+1)^2+9}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\cdot\int\frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x+\int\frac{-3}{(x+1)^2+9}\,\mathrm{d}x$$

K výpočtu prvního integrálu využijeme základní vzorec 15, ve druhém integrálu po zavedení lineární substituce lze užít vzorec 16. A výsledek bude

$$\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\cdot \ln|x^2+2x+10| - \operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}.$$

Jistě si kladete otázku, proč jsme začali u integrálů z racionálně lomených funkcí nejdříve integrovat speciální racionální lomené funkce, tzv. parciální zlomky. Vysvětlení je obsahem níže uvedeného textu.

7.5.2 Integrace racionálních funkcí ryze lomených

Má-li polynom s reálnými koeficienty k-násobný nereálný kořen $a+b\mathrm{i}$, má také k-násobný kořen $a-b\mathrm{i}$. V rozkladu tohoto polynomu na kořenové činitele (viz věta 3.6.1) pak kořenoví činitelé příslušní ke kořenům $a+b\mathrm{i}$, $a-b\mathrm{i}$ vystupují ve stejné mocnině. Součinem těchto kořenových činitelů je mocnina kvadratického polynomu s reálnými koeficienty. Odtud plyne následující věta.

Věta 7.5.1 (rozklad reálného polynomu v reálném oboru)**.**
Nechť $Q(x)$ je polynom s reálnými koeficienty, $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$. Nechť $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ jsou všechny jeho navzájem různé reálné kořeny s násobnostmi postupně $k, l, \ldots, r$. Nechť $a \pm b\mathrm{i}, c \pm d\mathrm{i}, \ldots, p \pm q\mathrm{i}$ jsou všechny jeho navzájem různé dvojice nereálných komplexně sdružených kořenů s násobnostmi postupně $s, t, \ldots, v$. Pak pro každé komplexní číslo x platí:

$$Q(x) = a_n(x-\alpha)^k(x-\beta)^l\cdots(x-\lambda)^r\cdot\left[(x-a)^2+b^2\right]^s\cdot$$
$$\cdot\left[(x-c)^2+d^2\right]^t\cdots\left[(x-p)^2+q^2\right]^v.$$

V definici 3.6.1 byla definována racionální ryze lomená funkce, nyní si ukážeme rozklad těchto funkcí na parciální zlomky.

Věta 7.5.2.

Nechť $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je racionální ryze lomená funkce, jejíž čitatel a jmenovatel nemají společné kořeny. Nechť

$$Q(x) = a_n(x-\alpha)^k(x-\beta)^l \cdots (x-\lambda)^r \cdot \left[(x-a)^2+b^2\right]^s \cdot$$
$$\cdot \left[(x-c)^2+d^2\right]^t \cdots \left[(x-p)^2+q^2\right]^v$$

je rozklad jmenovatele na kořenové činitele. Pak existují taková reálná čísla $A_1, A_2, \dots, A_k$, $B_1, B_2, \dots, B_l$, $L_1, L_2, \dots, L_r$, $M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, M_s, N_s$, $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \dots, P_t, Q_t$, $R_1, S_1, R_2, S_2, \dots, R_v, S_v$, že platí

$$\begin{aligned} R(x) = {} & \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \\ & + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \cdots + \frac{B_{l-1}}{(x-\beta)^{l-1}} + \frac{B_l}{(x-\beta)^l} + \\ & + \frac{L_1}{x-\lambda} + \frac{L_2}{(x-\lambda)^2} + \cdots + \frac{L_{r-1}}{(x-\lambda)^{r-1}} + \frac{L_r}{(x-\lambda)^r} + \\ & + \frac{M_1x+N_1}{(x-a)^2+b^2} + \cdots + \frac{M_{s-1}x+N_{s-1}}{((x-a)^2+b^2)^{s-1}} + \frac{M_sx+N_s}{((x-a)^2+b^2)^s} + \\ & + \frac{P_1x+Q_1}{(x-a)^2+b^2} + \cdots + \frac{P_{t-1}x+Q_{t-1}}{((x-a)^2+b^2)^{t-1}} + \frac{P_tx+Q_t}{((x-a)^2+b^2)^t} + \\ & + \frac{R_1x+S_1}{(x-a)^2+b^2} + \cdots + \frac{R_{v-1}x+S_{v-1}}{((x-a)^2+b^2)^{v-1}} + \frac{R_vx+S_v}{((x-a)^2+b^2)^v} + \end{aligned}$$

pro všechna komplexní čísla, jež nejsou kořeny jmenovatele $Q(x)$. Navíc existuje právě jedno vyjádření funkce $R(x)$ uvedeného tvaru.

Poznámka 7.5.1. Věta 7.5.2 zaručuje existenci reálných čísel A_i, B_i, L_i, M_i, N_i, P_i, Q_i, R_i, S_i, $i \in \mathbb{N}$, avšak neudává, jak se tato čísla určují. Výpočet lze provést **metodou neurčitých koeficientů**. Spočívá v tom, že v rovnici věty 7.5.2 násobíme obě strany rovnice polynomem $Q(x)$. Tím dostaneme rovnost platnou pro všechna komplexní čísla, jež nejsou kořeny polynomu $Q(x)$, tj. pro nekonečně mnoho x. Podle známé věty o polynomech mají tyto dva polynomy stejné koeficienty u stejných mocnin a tedy také stejné hodnoty pro všechna komplexní čísla x. Podmínky vyjadřující rovnost těchto koeficientů dávají systém lineárních rovnic pro neznámé A_i, B_i, L_i, M_i, N_i, P_i, Q_i, R_i, S_i. Označíme-li $n = \operatorname{st} Q(x)$, bude to soustava n lineárních rovnic o n neznámých s regulární maticí soustavy. Tato soustava musí mít nutně právě jedno řešení. Ukážeme si celý postup na příkladech.

Příklad 7.5.3. (rozklad obsahující zlomky $\frac{A}{ax+b}$)
Rozložte funkci $R(x) = \dfrac{5x^2+3x+8}{(x-2)(x-4)x}$ na součet parciálních zlomků.

Řešení: Funkce $R(x)$ je ryze lomená (polynom v čitateli má stupeň menší než polynom ve jmenovateli), můžeme provést rozklad podle věty 7.5.2:

$$\frac{5x^2+3x+8}{(x-2)(x-4)x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4}.$$

Násobíme-li obě strany této rovnice polynomem $(x-2)(x-4)x$, dostaneme rovnost dvou polynomů

$$\begin{aligned} 5x^2+3x+8 &= A\cdot(x-2)\cdot(x-4) + B\cdot x\cdot(x-4) + C\cdot x\cdot(x-2) = \\ &= Ax^2 - 6Ax + 8A + Bx^2 - 4Bx + Cx^2 - 2Cx = \\ &= (A+B+C)\cdot x^2 + (-6A-2B-2C)\cdot x + 8A. \end{aligned}$$

Porovnáme koeficienty u stejných mocnin:

$$\begin{array}{llcl} x^2: & 5 & = & A+B+C \\ x^1: & 3 & = & -6A-4B-2C \\ x^0: & 8 & = & 8A \\ \hline \end{array}$$

Řešením vzniklé soustavy tří rovnic o třech neznámých je $A=1$, $B=-\frac{17}{2}$, $C=\frac{25}{2}$. Rozklad zadané funkce na parciální zlomky pak bude vypadat takto

$$\frac{5x^2+3x+8}{(x-2)(x-4)x} = \frac{1}{x} + \frac{-\frac{17}{2}}{x-2} + \frac{\frac{25}{2}}{x-4}.$$

K rozkladu na parciální zlomky v softwaru `Mathematica` slouží příkaz
`Apart[(5x^2+3x+8)/((x-2)*(x-4)*x)]`

Poznámka 7.5.2. Jsou-li kořeny jmenovatele vesměs reálné jednoduché, lze užít s výhodou i jiné metody k určení koeficientů v rozkladu. Násobíme opět na obou stranách rovnice polynomem $Q(x)$, získáme na levé a pravé straně rovnosti polynomy, které se sobě rovnají pro všechna $x \in \mathbb{R}$. V dalším kroku pak do této rovnosti dosazujeme kořeny polynomu $Q(x)$. Dostaneme tak pro výpočet koeficientů v rozkladu rovnice o jedné neznámé.

Příklad 7.5.3 spočítáme znovu, tentokrát podle předchozí poznámky.

Příklad 7.5.4. Rozložte funkci $R(x) = \dfrac{5x^2+3x+8}{(x-2)(x-4)x}$ na součet parciálních zlomků.

Řešení: Rozklad podle věty 7.5.2 vypadá takto:

$$\frac{5x^2+3x+8}{(x-2)(x-4)x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4}.$$

Násobíme-li obě strany této rovnice polynomem $(x-2)(x-4)x$, dostaneme rovnost dvou polynomů

$$5x^2+3x+8 = A\cdot(x-2)\cdot(x-4) + B\cdot x\cdot(x-4) + C\cdot x\cdot(x-2).$$

Rovnost je splněna pro každé $x \in \mathbb{R}$ a můžeme do ní dosadit v podstatě libovolné reálné číslo. Nejvýhodnější je ovšem dosazovat přímo kořeny polynomu ze jmenovatele zadané funkce, v našem případě to jsou čísla 0, 2, 4.

$$\begin{array}{lrcl}
x=0\colon & 8 & = & A\cdot(-2)\cdot(-4) + B\cdot 0 + C\cdot 0 \\
x=2\colon & 34 & = & A\cdot 0 + B\cdot 2\cdot(-2) + C\cdot 0 \\
x=4\colon & 100 & = & A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 4\cdot 2 \\
\hline
\end{array}$$

Snadno dokážete z jednotlivých rovnic vyjádřit koeficienty $A = 1$, $B = -\frac{17}{2}$, $C = \frac{25}{2}$. Rozklad už je pak stejný jako v příkladě 7.5.3.

Je na vás, abyste sami posoudili, která z uvedených metod je pro vás vhodnější, a tu pak použijete při samotném výpočtu. Často ovšem obě metody kombinujeme a tím se výpočet značně urychlí.

Příklad 7.5.5. (**rozklad obsahující zlomky** $\frac{A}{(ax+b)^n}$, $n \in \mathbb{N}$)

Rozložte funkci $R(x) = \dfrac{5x^2+3x+5}{x\cdot(x-4)^3}$ na součet parciálních zlomků.

Řešení: Podle věty 7.5.2 naznačíme, jak bude vypadat rozklad na parciální zlomky zadané funkce

$$\frac{5x^2+3x+8}{x\cdot(x-4)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2} + \frac{D}{(x-4)^3}.$$

Vzniklou rovnost vynásobíme jmenovatelem zlomku z levé strany

$$5x^2+3x+8 = A\cdot(x-4)^3 + B\cdot x\cdot(x-4)^2 + C\cdot x\cdot(x-4) + D\cdot x. \qquad (*)$$

Polynom ve jmenovateli funkce $R(x)$ má pouze dva kořeny, po dosazení do předchozí rovnosti dostaneme hodnoty koeficientů A a D.

$$\begin{array}{llcll} x=0: & 8 & = & A\cdot(-64) & \Rightarrow \quad A=-\frac{1}{8} \\ x=4: & 100 & = & D\cdot 4 & \Rightarrow \quad D=25 \end{array}$$

Dále bychom mohli dosadit další dvě libovolná reálná čísla a dostali bychom soustavu dvou rovnic o dvou nezmámých B a C. Podobně dostaneme soustavu dvou rovnic, i když budeme porovnávat koeficienty u mocnin proměnné x na levé a pravé straně rovnosti $(*)$:

$$\begin{array}{lrcl} x^3: & 0 & = & A+B \\ x^2: & 5 & = & A\cdot(-12)+B\cdot(-8)+C \\ \hline \end{array}$$

Dosazením již známých hodnot A, D vzniklou soustavu snadno dořešíme, tedy $B=\frac{1}{8}$ a $C=\frac{9}{2}$. Rozklad zadané funkce $R(x)$ na parciální zlomky pak vypadá takto

$$\frac{5x^2+3x+8}{x\cdot(x-4)^3}=\frac{-\frac{1}{8}}{x}+\frac{\frac{1}{8}}{x-4}+\frac{\frac{9}{2}}{(x-4)^2}+\frac{25}{(x-4)^3}.$$

Příklad 7.5.6. **(rozklad obsahující zlomky $\frac{Ax+B}{px^2+qx+r}$, kde $q^2-4pr<0$)**
Rozložte funkci $R(x)=\dfrac{2x^2+3x+5}{(x-2)(x^2+4x+5)}$ na součet parciálních zlomků.

Řešení: Jmenovatel funkce $R(x)$ má jeden reálný kořen $x=2$ a komplexně sdružené kořeny $-2\pm\mathrm{i}$. Podle věty 7.5.2 rozklad na parciální zlomky zadané funkce bude vypadat takto:

$$\frac{2x^2+3x+5}{(x-2)(x^2+4x+5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+5}.$$

Vynásobíme-li tuto rovnici jmenovatelem levé strany, dostaneme

$$2x^2+3x+5=A\cdot(x^2+4x+5)+(Bx+C)\cdot(x-2).$$

Neurčité koeficienty nalezneme podobně jako v předchozím příkladě, dosadíme jediný možný reálný kořen a porovnáme koeficienty u některých mocnin proměnné x:

$$\begin{array}{rrcl} x=2: & 19 & = & A\cdot 17 \\ x^2: & 2 & = & A+B \\ x^0: & 5 & = & A\cdot 5+C\cdot(-2) \\ \hline \end{array}$$

Uvedená soustava má jediné řešení, a to $A = \frac{19}{17}$, $B = \frac{15}{17}$ a $C = \frac{5}{17}$. Rozklad zadané funkce $R(x)$ pak vypadá takto

$$R(x) = \frac{\frac{19}{17}}{x-2} + \frac{\frac{15}{17}x + \frac{5}{17}}{x^2+4x+5}.$$

Nyní jsme v podstatě zvládli rozklad racionálních funkcí ryze lomených na parciální zlomky a postupně bychom mohli vypočítat integrály z racionálních funkcí ryze lomených v předcházejících příkladech 7.5.3, 7.5.5, 7.5.6.

Příklad 7.5.7. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{5x^2+3x+8}{(x-2)(x-4)x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: V příkladu 7.5.3 jsme provedli rozklad zadaného integrandu na parciální zlomky. Dále už počítáme integrál

$$\int \frac{5x^2+3x+8}{(x-2)(x-4)x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-\frac{17}{2}}{x-2} + \frac{\frac{25}{2}}{x-4} \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \ln|x| - \tfrac{17}{2}\ln|x-2| + \tfrac{25}{2}\ln|x-4| + C.$$

Příklad 7.5.8. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{5x^2+3x+5}{x\cdot(x-4)^3}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Využijeme rozkladu zadané funkce na parciální zlomky z příkladu 7.5.5 a dostaneme

$$\int \frac{5x^2+3x+5}{x\cdot(x-4)^3}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{-\frac{1}{8}}{x} + \frac{\frac{1}{8}}{x-4} + \frac{\frac{9}{2}}{(x-4)^2} + \frac{25}{(x-4)^3} \right) \mathrm{d}x =$$
$$= -\tfrac{1}{8}\ln|x| + \tfrac{1}{8}\ln|x-4| - \frac{\frac{9}{2}}{x-4} - \frac{\frac{25}{2}}{(x-4)^2} + C.$$

Příklad 7.5.9. Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{2x^2+3x+5}{(x-2)(x^2+4x+5)}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Z příkladu 7.5.6 známe rozklad zadané funkce na parciální zlomky a tedy začneme rovnou integrovat

$$\int \frac{2x^2+3x+5}{(x-2)(x^2+4x+5)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\frac{19}{17}}{x-2} + \frac{\frac{15}{17}x + \frac{5}{17}}{x^2+4x+5} \right) \mathrm{d}x =$$

S integrací první funkce bychom neměli mít problémy, ale druhou funkci si musíme nejprve upravit. Podobně jako v příkladu 7.5.2 doplníme do čitatele derivaci jmenovatele a dopočítáme příslušné konstanty tak, aby rovnost nebyla porušena.

$$= \int \frac{\frac{19}{17}}{x-2}\,\mathrm{d}x + \frac{15}{17}\cdot\int \frac{x+\frac{1}{3}}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x = \tfrac{19}{17}\ln|x-2| +$$
$$+\frac{15}{34}\cdot\int \frac{2x+\frac{2}{3}+4-4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x = \tfrac{19}{17}\ln|x-2| + \frac{15}{34}\cdot\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x -$$
$$-\frac{15}{34}\cdot\int \frac{\frac{10}{3}}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x =$$

První integrál spočítáme pomocí základního vzorce 15, ve druhém integrálu kvadratickou funkci ve jmenovateli integrandu upravíme na čtverec a pak použijeme vzorec 16.

$$= \tfrac{19}{17}\ln|x-2| + \tfrac{15}{34}\ln|x^2+4x+5| - \frac{25}{17}\cdot\int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \tfrac{19}{17}\ln|x-2| + \tfrac{15}{34}\ln|x^2+4x+5| - \tfrac{25}{17}\operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

V předcházejících textu jsme vypočítali snad dostatečný počet vzorových příkladů, abychom mohli poukázat na hlavní problém, který se může vyskytnout při praktické integraci racionální funkce ryze lomené, neboť teoreticky máme problém jednoznačně zvládnutý. První větší problém nastane při hledání rozkladu polynomu

$$Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Spočívá v tom, že polynom není zpravidla vyjádřen ve tvaru součinů polynomů nanejvýš druhého stupně a jejich mocnin. Nalezení kořenů polynomu se obecně nemusí vůbec podařit a nezbývá nic jiného než použít nějaký vhodný software (např. Mathematica), který to vyřeší za nás.

Další problém může nastat při hledání neurčitých koeficientů. Příklady, které jsme zatím počítali, obsahovaly pouze několik koeficientů (méně než 10). Mohlo by se stát, že získáme soustavu lineárních rovnic pro neznámé (neurčité koeficienty), kterých by mohlo být více než 100. K řešení takových soustav bychom opět museli využít matematických softwarů.

Poslední zobecnění, které můžeme ještě udělat, je v tom, že chceme integrovat racionální funkci neryze lomenou.

7.5.3 Integrace racionálních funkcí neryze lomených

Jistě jste si všimli (věta 7.5.2), že rozklad funkce $R(x)$ na součet parciálních zlomků je možný za předpokladu, že $R(x)$ je ryze lomená funkce. V případě neryze lomené racionální funkce postupujeme podle věty 3.6.3. o převodu racionální funkce neryze lomené na racionální funkci celistvou (polynom) a ryze lomenou racionální funkci.

Příklad 7.5.10. Neryze lomenou racionální funkci

$$\frac{x^6 - 3x^5 + 7x^4 - 4x^2 - 9x - 1}{x^3 + 1}$$

vyjádřete jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Řešení: Protože jde o neryze lomenou funkci, provedeme nejprve dělení polynomů z čitatele a jmenovatele zadané funkce.

$$\begin{array}{l}
(x^6 - 3x^5 + 7x^4 - 4x^2 - 9x - 1) : (x^3 + 1) \quad = \quad x^3 - 3x^2 + 7x - 1 \\
\underline{-x^6 \qquad\qquad -x^3} \\
\quad - 3x^5 + 7x^4 - x^3 - 4x^2 - 9x - 1 \\
\quad \underline{+ 3x^5 \qquad\qquad + 3x^2} \\
\qquad\quad 7x^4 - x^3 - x^2 - 9x - 1 \\
\qquad\quad \underline{- 7x^4 \qquad\qquad - 7x} \\
\qquad\qquad - x^3 - x^2 - 16x - 1 \\
\qquad\qquad \underline{+ x^3 \qquad\qquad + 1} \\
\qquad\qquad\quad - x^2 - 16x
\end{array}$$

Nyní můžeme psát

$$\frac{x^6 - 3x^5 + 7x^4 - 4x^2 - 9x - 1}{x^3 + 1} = x^3 - 3x^2 + 7x - 1 - \frac{x^2 + 16x}{x^3 + 1}.$$

Klíčová slova

racionální funkce, racionální funkce ryze a neryze lomená, parciální zlomky, rozklad na parciální zlomky, integrace parciálních zlomků, integrace racionálních funkcí (ryze i neryze) lomených

7.6 Integrace goniometrických funkcí typu $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$

Studijní cíle

1. Pochopit zápis integrálu ve tvaru $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$.
2. Seznámit se s univerzální (goniometrickou) substitucí $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Znát odpověď na otázky: Pro jaký typ integrálu ji použijeme a jaké náhrady (substituce) v integrálu musíme provést.
3. Provádět praktický výpočet $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$.
4. Možnost seznámit se s jednoduššími substitucemi : $\sin x = t$, $\cos x = t$, $\operatorname{tg} x = t$ ve speciálních případech. (Pouze pro náročné studenty).

V tomto odstavci se bude objevovat symbol $R(u, v)$. V následující definici si objasníme, co znamená.

polynom ve dvou proměnných, racionální lomená funkce ve dvou proměnných

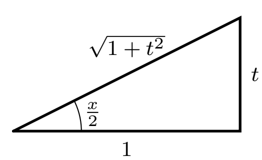
Definice 7.6.1.

Součet konečného počtu sčítanců $c \cdot u^m \cdot v^n$, kde $c \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$, $n \geq 0$, se nazývá **polynom ve dvou proměnných** a značí se $P(u, v)$. Funkce $R(u, v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$, kde $P(u, v)$, $Q(u, v)$ jsou polynomy ve dvou proměnných, se nazývá **racionální lomená funkce ve dvou proměnných**.

Obraťme nyní pozornost k integrálům $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$, kde do racionální funkce $R(u, v)$ bylo dosazeno $u = \sin x$, $v = \cos x$. Integrály tohoto typu substitucí $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ přejdou v integrály z racionální funkce. Provádíme totiž substituci $x = 2\operatorname{arctg} t$, $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Pro odvození vztahů pro $\sin x$, $\cos x$ vyjdeme z pravoúhlého trojúhelníka na Obr. 7.6.1. Vidíme, že $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ a dále

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \sin\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \qquad (7.6.1)$$



Obr. 7.6.1

S využitím vztahů mezi goniometrickými funkcemi
$\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ platí

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, \quad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}. \tag{7.6.2}$$

Po dosazení vztahů (7.6.1) do (7.6.2) dostaneme

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Tedy, po substituci do integrálu bude

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka 7.6.1. Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ lze vždy substitucí $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ převést na integrály z racionální funkce, proto se tato substituce nazývá univerzální.

Příklad 7.6.1. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

Řešení: Substitucí $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$ získáme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Příklad 7.6.2. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Substitucí $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$ získáme

$$\begin{aligned}\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1-\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{\frac{1+t^2-2t}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \\ &= \int \frac{t^2+1-2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int\left(1-\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = t - \ln(1+t^2) = \\ &= \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

Poznámka 7.6.2. V některých případech lze $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ převést na integrál z racionální funkce jednodušší substitucí:

I. Je-li funkce R lichá vzhledem k proměnné $\sin x$, tj. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, přejde substitucí $\cos x = t$ daný integrál v integrál z racionální funkce.

II. Je-li funkce R lichá vzhledem k proměnné $\cos x$, tj. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, přejde substitucí $\sin x = t$ daný integrál v integrál z racionální funkce.

III. Je-li funkce R sudá vzhledem k oběma proměnným $\cos x$, $\sin x$, tj. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, lze použít substituce $\operatorname{tg} x = t$.

Poznámka 7.6.3. Substituce $\sin x = t$ nebo $\cos x = t$ se dají použít i v případech, kdy zadaný integrál je sice tvaru I. nebo II., ale integrand musíme kvůli snadné integraci „upravit" (viz následující příklad).

Příklad 7.6.3. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{3-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Zřejmě $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, podle poznámky 7.6.3 II. použijeme tedy substituci: $\sin x = t$, $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

$$\int \frac{3-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(3-\sin x)\cdot\cos x}{\cos x\cdot\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(3-t)\cdot\mathrm{d}t}{1-t^2} =$$
$$= \int \frac{3-t}{(1-t)(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{2}{1+t}\right)\mathrm{d}t = -\ln|1-t| +$$
$$+ 2\ln|1+t| = \ln\frac{(1+t)^2}{|1-t|} = \ln\frac{(1+\sin x)^2}{|1-\sin x|} + C.$$

Příklad 7.6.4. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Položme $R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}$. Pak

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{-\sin x + \cos x}{-\sin x - 2\cos x} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} = R(\sin x, \cos x).$$

Podle poznámky 7.6.3 III. zavedeme substituci $\operatorname{tg} x = t$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ a upravíme zadaný integrál takto:

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x + 2\cos x}{\cos x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 2}\,\mathrm{d}x = \\
&\quad = \int \frac{t-1}{t+2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \int \left(\frac{-\frac{3}{5}}{t+2} + \frac{\frac{3}{5}t - \frac{1}{5}}{t^2+1}\right) = -\tfrac{3}{5}\ln|t+2| + \\
&\quad + \frac{3}{5\cdot 2}\cdot\int\frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{5}\cdot\int\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = -\tfrac{3}{5}\ln|t+2| + \tfrac{3}{10}\ln|t^2+1| - \\
&\quad - \tfrac{1}{5}\operatorname{arctg} t = -\tfrac{3}{5}\ln|\operatorname{tg} x + 2| + \tfrac{3}{10}\ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) - \tfrac{1}{5}x + C.
\end{aligned}
$$

Při integraci jsme využili následujícího rozkladu integrandu na součet parciálních zlomků:

$$
\begin{aligned}
\frac{t-1}{(t+2)\cdot(t^2+1)} &= \frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{1+t^2} \\
t-1 &= A\cdot(t^2+1) + (Bt+C)\cdot(t+2) \\
t=-2: &\quad -3 = 5A \\
t^2: &\quad 0 = A+B \\
t^0: &\quad -1 = A+2C
\end{aligned}
$$

Vyřešením vzniklé soustavy dostaneme koeficienty rozkladu $A = -\frac{3}{5}$, $B = \frac{3}{5}$, $C = -\frac{1}{5}$.

Klíčová slova

integrace goniometrických funkcí, univerzální substituce

7.7 Integrace některých dalších funkcí

V této části se budeme se zabývat jedním z typů integrálů z iracionálních funkcí

$$\int R(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, x^{\frac{p_n}{q_n}})\,\mathrm{d}x,$$

kde R je racionální funkce a $p_i \in \mathbb{Z}$, $q_i \in \mathbb{N}$ jsou dvojice nesoudělných čísel. Tento integrál řešíme substitucí $x = t^s$ ($\mathrm{d}x = s\cdot t^{s-1}\mathrm{d}t$), kde s je nejmenší společný násobek jmenovatelů $q_1, \ldots, q_n$. Substituce převede zadaný integrál na integrál z racionální funkce.

Příklad 7.7.1. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ccc} \frac{1}{2}, \frac{3}{4} & \Rightarrow & s = 4 \\ x & = & t^4 \\ \mathrm{d}x & = & 4t^3\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = 4 \cdot \int \frac{t^2}{1+t^3} \cdot t^3\,\mathrm{d}t =$$

$$= 4 \cdot \int \frac{t^2 \cdot (t^3+1-1)}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = 4 \cdot \left[\int t^2\,\mathrm{d}t - \int \frac{t^2}{1+t^3}\,\mathrm{d}t\right] =$$

$$= \tfrac{4}{3}t^3 - \tfrac{4}{3}\ln\left|t^3+1\right| = \tfrac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - \tfrac{4}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right|\right) + C.$$

7.8 Aplikace neurčitého integrálu

Než přistoupíme k příkladům vedoucím na aplikace neurčitého integrálu, připomeňme si, co jsme napsali v úvodním odstavci. Řekli jsme si, že v konkrétních úlohách se někdy snadněji popíše hodnota sledované veličiny, jindy její změna. Jejich vzájemný vztah je podstatou celé matematické analýzy. Ta se skládá z diferenciálního počtu, který od hodnot veličiny odvozuje její změnu a integrálního počtu, který od změn veličiny odvozuje její hodnotu.

V následujících vzorových příkladech budeme hledat funkční závislosti jedné veličiny na druhé v případě, že je dána derivace vyjadřující okamžitou změnu hledané fyzikální veličiny a funkční hodnota hledané funkce v nějakém bodě.

Příklad 7.8.1. Rychlost vlaku je dána rovnicí $v(t) = 6t^2+4t+2$. Vyjádřete dráhu s jako funkci času, když v čase $t = 2$ minuty měl vlak ujetou dráhu 2030m. Jakou dráhu měl vlak ujetou v čase $t = 0$?

Řešení: Z fyzikálního významu derivace (Kapitola 5, str. 23) plyne, že $s'(t) = v(t)$. Odtud lze dráhu vyjádřit jako integrál z rychlosti, tj.

$$s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = \int (6t^2+4t+2)\mathrm{d}t = 6\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} + 2t + C = 2t^3 + 2t^2 + 2t + C$$

Dosadíme a porovnáme se zadanou podmínkou $s(2) = 2 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + C = 2030$. Odtud zjistíme $C = 2002$m. Celkově tak se dá dráha vyjádřit v závislosti na čase pomocí vzorce

$$s(t) = 2t^3 + 2t^2 + 2t + 2002.$$

V čase $t = 0$ ujel vlak již dráhu $s(0) = 2002$m.

Příklad 7.8.2. Přírůstek hodnoty vkladu na účtu v čase t ve spojitém úrokování je vyjádřen funkcí $y(t) = 1000 \cdot \mathrm{e}^{0.08t}$. Vyjádřete hodnotu vkladu h jako funkci času, když počáteční vklad byl 10000 Kč.

Řešení: Hodnota vkladu se vypočítá jako integrál z funkce $y(t)$. Je tedy

$$h(t) = \int y(t)\,\mathrm{d}t = \int 1000 \cdot \mathrm{e}^{0.08t}\,\mathrm{d}t = 1000 \cdot \frac{\mathrm{e}^{0.08t}}{0.08} + C = 12500 \cdot \mathrm{e}^{0.08t} + C.$$

Protože $h(0) = 10000$, tak $h(0) = 10000 = 12500 \cdot \mathrm{e}^{0.08 \cdot 0} + C$, odkud získáme $C = -2500$. Hodnota vkladu v čase t se tak rovná $h(t) = 12500 \cdot \mathrm{e}^{0.08t} - 2500$.

Příklad 7.8.3. Přírůstek obyvatelstva ve Zlínském kraji v roce t je vyjádřen funkcí $r(t) = 3045 \cdot t^{2.03}$. Najděte závislost počtu obyvatel p na čase, jestliže v současné době žije v regionu 500000 obyvatel. Zjistěte, kolik obyvatel se dá předpokládat v Zlínském kraji za 5 let.

Řešení: Počet obyvatel p v čase t je rovný

$$p(t) = \int r(t)\,\mathrm{d}t = \int 3045 \cdot t^{2.03}\,\mathrm{d}t = 3045 \cdot \frac{t^{2.03}}{2.03} = 1500 \cdot t^{2.03} + C.$$

Protože $p(0) = 500000$, tak snadno z rovnice $500000 = 1500 \cdot 0 + C$ vypočítáme $C = 500000$. Počet obyvatel v závislosti na čase t je dán funkcí $p(t) = 1500 \cdot t^{2.03} + 500000$. Za 5 let by měl mít Zlínský kraj

$$p(5) = 1500 \cdot 5^{2.03} + 500000 \doteq 39355 + 500000 = 539355 \text{ obyvatel.}$$

Index