

# 8 Určitý integrál

8.1. Integrovaní - sčítání mnoha malých příspěvků .....	203
8.2. Výpočet určitého integrálu .....	209
8.3. Základní vlastnosti určitého integrálu .....	212
8.4. Integrace per partes a metoda substituční pro určité integrály .....	215
8.5. Aplikace určitého integrálu v geometrii .....	217
8.5.1 Obsah rovinného obrazce .....	218
8.5.2 Délka rovinné křivky .....	226
8.5.3 Objem rotačního tělesa .....	229
8.5.4 Plášť rotačního tělesa .....	232
8.6. Aplikace určitého integrálu ve fyzice .....	233
Index .....	238

OBSAH  
INDEX  
CVIČENÍ

Jak už jsme si řekli v 7. kapitole, integrální počet vznikl v 17. století s rozvojem výroby a společnosti. V té době se mimo jiné řešily důležité geometrické problémy jako výpočet obsahu plochy (tj. rovinného obrazce), délky křivky, objem tělesa, těžiště tělesa atd. Myšlenka integrování vzešla právě z řešení těchto problémů. V současné době existují různé typy integrálů, nejnámější a zároveň nejnázornější z nich je tzv. Riemannův integrál, nímž se v této kapitole budeme zabývat. Naším úkolem tedy bude vyřešení Riemannova integrálu z funkce  $f(x)$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . My jsme se v minulé kapitole naučili počítat neurčitý integrál (jako opačný proces k derivování), ale pravá podstata „integrování“ je asi někde jinde. V následujícím textu vysvětlíme základní princip integrování a později ukážeme, jak s tímto integrováním souvisí i pojem neurčitý integrál.



## 8.1 Integrovaní - „sčítání“ mnoha malých příspěvků

### Studijní cíle

1. Pochopit proces integrování tzv. proužkovou metodu.
2. Umět vysvětlit odvození Riemannova integrálu - pomocí metody horních a dolních součtů a pomocí metody integrálních součtů.

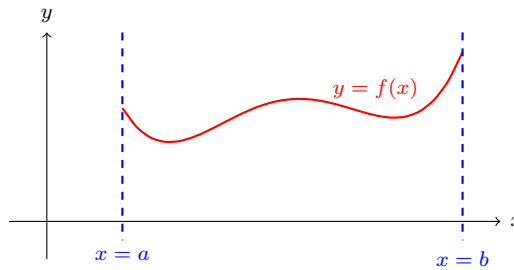


### Motivace

Abychom pochopili podstatu integrování, vyjděme z formulace následujícího geometrického problému: Nechť je dána spojitá nezáporná funkce  $f(x)$

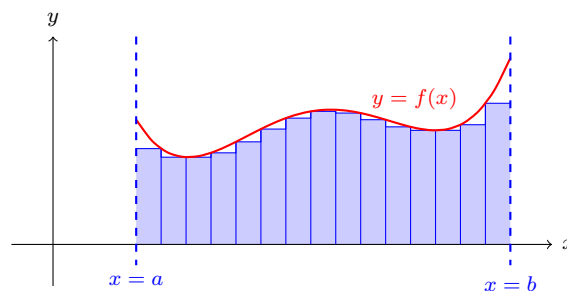


v intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Graf této funkce spolu s přímkami o rovnicích  $x = a$ ,  $x = b$  a osou  $x$  vymezí v kartézské soustavě souřadnic rovinný útvar. Naším úkolem je zjistit obsah tohoto rovinného obrazce.



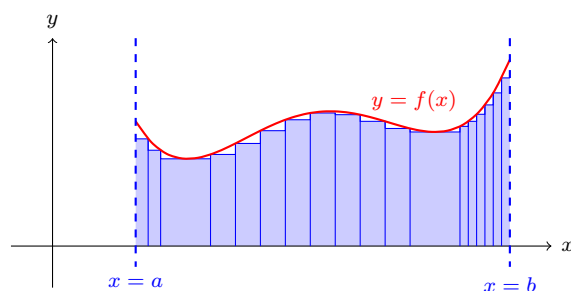
Obr. 8.1.1

Z pohledu na Obr. 8.1.1 jistě plyne, že stanovit číslo vyjadřující obsah rovinného obrazce je naprosto korektní úvaha. Z minulých školních let určitě ještě znáte nějaké vzorce pro výpočet obsahů (kruh, obdélník, lichoběžník, trojúhelník), které bychom snad mohli nějakým způsobem využít. Pokusme se nejdříve stanovit obsah obrazce alespoň přibližně. Kdybychom si nakreslili obrazec na milimetrový papír a spočítali všechny čtverečky o obsahu  $1\text{mm}^2$ , které se do našeho obrazce vejdou, měli bychom zhruba obsah obrazce vypočítaný. Uvědomíme-li si, že náš útvar není zcela obecný, ale je omezen hned třemi přímkovými útvary a teprve čtvrtý útvar je obecnou křivkou, vidíme, že takové „měření“ lze velice snadno zjednodušit. Nakreslíme útvar na milimetrovou síť tak, aby osa  $x$  splývala se stranou některé řady čtverečků. Pak stačí jen sečíst obsahy sloupečků, obdélníčků (proužků) s milimetrovou podstavou, které jsou v obrazci obsaženy. Proto tuto metodu nazveme „proužková metoda“. Na Obr. 8.1.2 je proužková metoda naznačena. Z to-



Obr. 8.1.2

hoto popisu je vidět, že tímto způsobem dostaneme poměrně přesně obsah obrazce. A právě tato myšlenka je principem integrování. Než tuto myšlenku dovedeme až k matematicky přesnému vyjádření obsahu rovinného obrazce, upozorníme na dvě důležité věci. V našich úvahách budeme používat pouze spojitou funkci  $f(x)$ , i když obecná definice pracuje s funkcemi, které nemusí být nutně spojité. A za druhé, délka podstavy obdélníků (proužků) nemusí být v obecném případě stejná. Na Obr. 8.1.3 je takové dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$  vyznačeno.



Obr. 8.1.3

**Dělení** intervalu  $\langle a, b \rangle$  je soubor vzestupně řazených hodnot

$$D = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}.$$

Délka největšího dílku dělení, tj. hodnota

$$\nu(D) = \max\{(x_{i+1} - x_i); i = 0, 1, 2, \dots, n - 1\},$$

se nazývá **norma** dělení.

Zkoumejme, co se děje na  $i$ -tém intervalu  $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ ,  $0 \leq i \leq n - 1$ , vzniklém z tohoto dělení. Jistě je vám jasné, že funkce  $f(x)$  je spojitá i na každém takovém intervalu a podle Weierstrassovy věty (věta 4.6.2) nabývá na uzavřeném intervalu své největší a nejmenší hodnoty. Pro interval  $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$  a funkci  $f(x)$  označme tyto hodnoty jako  $m_i$ ,  $M_i$ . Sestrojíme-li nad každou základnou  $\overline{x_i x_{i+1}}$  obdélník o výšce  $m_i$ , dostaneme sadu obdélníkových proužků, které jsou našemu obrazci vepsány. Jejich celkový obsah tedy představuje jistý „dolní odhad“ obsahu obrazce. Obdobně celkový obsah obdélníků o výškách  $M_i$  sestrojovaných nad stejnými základnami, a tedy zadanému obrazci opsaných, je „horním odhadem“ obsahu obrazce. Označíme-li hledaný obsah obrazce  $P$ , můžeme pak psát

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq P \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

dělení intervalu

norma dělení

dolní, horní součet

Dolní, resp. horní odhad obsahu obrazce nazýváme **dolním**, resp. **horním součtem** pro funkci  $f(x)$  a dělení  $D$ , a značíme

$$L(f, D) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot (x_{i+1} - x_i), \quad U(f, D) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

zjemnění dělení

Odhady lze samozřejmě zpřesnit, budeme-li dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$  zjemňovat, tzn., že mezi jeho stávající dělicí body vložíme další. Dělení  $\bar{D}$ , které takto vznikne, se nazývá **zjemněním** dělení  $D$ . Je zřejmé, že norma  $\nu(\bar{D})$  je menší nebo stejná jako norma  $\nu(D)$  dělení hrubšího. Uvědomme si, že na každém z těchto nových dílků nemůže funkce dosáhnout nižší nejmenší hodnoty než na dílku původním. Nemůže dosáhnout také vyšší největší hodnoty než na dílku původním. Pro dolní a horní součet zjemněného dělení platí

$$L(f, D) \leq L(f, \bar{D}) \leq P \leq U(f, \bar{D}) \leq U(f, D).$$

Jistě budete souhlasit s tím, že když budeme dělení dále zjemňovat, budou se podle předchozí nerovnosti dolní a horní součty k sobě přibližovat (můžeme dokumentovat výpočtem v následujících příkladech). Pro spojitou funkci se dá ukázat, že při limitním přechodu  $\nu(D) \rightarrow 0$  limitní hodnoty dolních a horních součtů splynou a definují tak požadovaný obsah obrazce  $P$ . Tedy lze dokázat, že pro spojitou funkci definovanou na uzavřeném intervalu platí

$$\lim_{\nu(D) \rightarrow 0} L(f, D) = \lim_{\nu(D) \rightarrow 0} U(f, D) = P.$$

Riemannův integrál

Tato společná hodnota limity dolních a horních součtů dané funkce při zjemňujícím se dělení se nazývá **Riemannovým integrálem z funkce  $f(x)$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$**  a geometricky představuje plochu obrazce omezeného grafem funkce, osou  $x$  a přímkami o rovnicích  $x = a$ ,  $x = b$ . Říkáme také, že funkce  $f(x)$  je **integrace schopná** nebo **integrabilní** na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Tento integrál označujeme

$$P = \int_a^b f(x) dx.$$



**Příklad 8.1.1.** Pomocí horních a dolních součtů spočítejte přibližně obsah plochy mezi grafem funkce  $f(x) = x^2$  a osou  $x$  na intervalu  $\langle 1, 3 \rangle$ . Zvolte nejprve  $n = 1$  a dělení postupně zjemňujte ( $n = 2, 3, 4, 10, 20$ ). K výpočtu součtů lze využít software **Mathematica**.

**Řešení:** [Prezentace 8.1.1](#)



**Příklad 8.1.2.** Pomocí horních a dolních součtů spočítejte přibližně obsah plochy mezi grafem funkce  $f(x) = \sqrt{4-x}$  a osou  $x$  na intervalu  $\langle 1, 4 \rangle$ . Zvolte nejprve  $n = 1$  a dělení postupně zjemňujte ( $n = 2, 3, 4, 10, 20, 40$ ). K výpočtu součtů lze využít software **Mathematica**.



**Řešení:** [Prezentace 8.1.2](#)



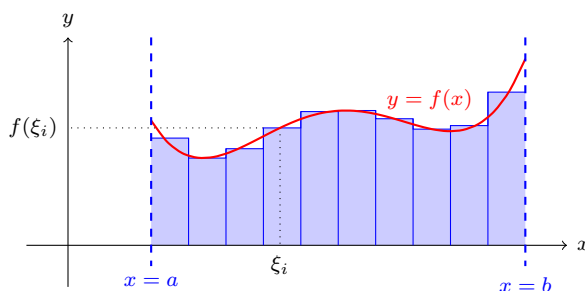
Možná by vás mohlo napadnout, že bychom při zjišťování obsahu obrazce mohli vytvořit jiný typ součtů, definovaný pro spojitou funkci  $f(x)$  a dělení  $D$  intervalu  $\langle a, b \rangle$ . V každém intervalu  $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$  zvolme libovolně bod  $\xi_i$  (viz Obr. 8.1.4), který bude tento interval reprezentovat (tedy zastupovat). Pro všechna  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$  platí  $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ . Označme

$$S(f, D) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Dostali jsme nový typ součtů, tzv. **integrální součty**, pro které platí při libovolně zvoleném dělení  $D$

integrální součty

$$L(f, D) \leq S(f, D) \leq U(f, D).$$



Obr. 8.1.4

Protože pro spojitou funkci splyne pro  $\nu(D) \rightarrow 0$  limita horních součtů s limitou dolních součtů (společná hodnota je rovna integrálu z funkce  $f(x)$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ ) můžeme vyslovit následující tvrzení:

**Věta 8.1.1** (Nezávislost integrálu na reprezentantech).

Pro integrální součty  $S(f, D)$  platí při libovolném výběru reprezentantů

$$\lim_{\nu(D) \rightarrow 0} S(f, D) = \int_a^b f(x) dx.$$

Tento vztah se s výhodou využije později při aplikacích integrálu.

Všimněme si ještě limity  $\lim_{\nu(D) \rightarrow 0} S(f, D)$ . Mohli bychom ji chápat tak, že obdélníčky z Obr. 8.1.4 se stále „ztenčují“ a „zhušťují“ a lépe zakrývají křivočarý lichoběžník určený funkcí  $f$  v intervalu  $\langle a, b \rangle$ .



**Příklad 8.1.3.** Pomocí integrálních součtů spočítejte přibližně obsah plochy mezi grafem funkce  $f(x) = x^2$  a osou  $x$  na intervalu  $\langle 1, 3 \rangle$ . Zvolte nejprve  $n = 1$  a dělení postupně zjemňujte ( $n = 2, 3, 4, 10, 20$ ). K výpočtu součtů lze využít software **Mathematica**.

**Řešení:** [Prezentace 8.1.3](#)



**Příklad 8.1.4.** Pomocí integrálních součtů spočítejte přibližně obsah plochy mezi grafem funkce  $f(x) = \sqrt{4-x}$  a osou  $x$  na intervalu  $\langle 1, 4 \rangle$ . Zvolte nejprve  $n = 1$  a dělení postupně zjemňujte ( $n = 2, 3, 4, 10, 20, 40$ ). K výpočtu součtů lze využít software **Mathematica**.

**Řešení:** [Prezentace 8.1.4](#)



**Příklad 8.1.5.** Nechť  $f(x) = c$  v  $\langle a, b \rangle$ . Pak pro libovolné dělení  $D = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$  a libovolné  $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$  platí  $f(\xi_i) = c$ . Takže

$$S(f, D) = \sum_{i=0}^{n-1} c \cdot (x_{i+1} - x_i) = c \cdot (b - a).$$

A tedy pro integrální součty  $S(f, D)$  platí při libovolném výběru reprezentantů

$$\lim_{\nu(D) \rightarrow 0} S(f, D) = \lim_{\nu(D) \rightarrow 0} c \cdot (b - a) = c \cdot (b - a).$$

Funkce  $f(x) = c$  je tak v intervalu  $\langle a, b \rangle$  integrace schopna a platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b c dx = c \cdot (b - a).$$



**Příklad 8.1.6.** Nechť  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{je-li } x \in \langle 0, 1 \rangle \text{ racionální číslo,} \\ 1, & \text{je-li } x \in \langle 0, 1 \rangle \text{ iracionální číslo.} \end{cases}$  Buď  $D = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$  libovolné dělení, nechť  $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$  je racionální číslo,  $\eta_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$  číslo iracionální. Pak

$$S(f, D, \{\xi_i\}) = 0, \quad S(f, D, \{\eta_i\}) = 1.$$

K libovolnému dělení  $D_n$  lze nalézt množiny  $\{\xi_n\}$ ,  $\{\eta_n\}$  tak, že

$$\lim_{\nu(D_n) \rightarrow 0} S(f, D_n, \{\xi_n\}) = 0, \quad \lim_{\nu(D_n) \rightarrow 0} S(f, D_n, \{\eta_n\}) = 1.$$

Tzn., že funkce  $f$  není v intervalu  $\langle a, b \rangle$  integrace schopná.



### Klíčová slova

dělení intervalu, norma dělení, horní součet, dolní součet, zjemnění dělení, Riemannův integrál, integrální součet



## 8.2 Výpočet určitého integrálu

K výpočtu určitého integrálu lze použít níže uvedenou Leibniz - Newtonovu formuli.

### Věta 8.2.1 (Leibniz-Newtonova formule).

Nechť  $f(x)$  je integrace schopna na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Nechť  $F(x)$  je na  $\langle a, b \rangle$  spojitá a na  $(a, b)$  primitivní funkcí k funkci  $f(x)$ . Pak

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Poznámka 8.2.1.** Předcházející věta ukazuje na možnost jiné definice určitého integrálu. Nazvěme funkci  $f$  **integrabilní v Newtonově smyslu** na intervalu  $\langle a, b \rangle$  právě tehdy, když existuje funkce  $F$ , která je na  $\langle a, b \rangle$  spojitá a na  $(a, b)$  primitivní k funkci  $f$ . V tomto případě definujeme její (Newtonův) integrál rovnicí

integrace v Newtonově smyslu

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Použili jsme symbolu  $[F(x)]_a^b$ , jehož se při výpočtu využívá a jímž se rozumí číslo  $F(b) - F(a)$ .

Pokud se hlouběji zamyslíte nad definicí určitého (Riemannova) integrálu, zjistíte, že v jeho definici jsme vůbec nevyužívali pojmu primitivní funkce, tedy integrálu neurčitého. Jak jste si jistě všimli, z Leibniz-Newtonovy formule plyne souvislost mezi určitým a neurčitým integrálem. Takže

výpočet určitého integrálu by neměl být žádným velkým problémem, když umíme vypočítat integrál neurčitý. To vám jistě spadl kámen ze srdce.

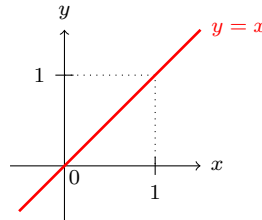
Abychom lépe porozuměli pojmům horní a dolní integrální součet a souvislost určitého a neurčitého integrálu, ukážeme v následujícím konkrétním příkladu platnost Leibniz-Newtonovy formule.



**Příklad 8.2.1.** Vypočtete  $\int_0^1 x \, dx$  (Obr. 8.2.1) pomocí metody horních a dolních integrálních součtů a pomocí Leibniz-Newtonovy formule.

**Řešení:** Podle Leibniz-Newtonovy formule platí:

$$\int_0^1 x \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$



Obr. 8.2.1

Spočítejme stejný integrál pomocí metody horních a dolních integrálních součtů. Zvolme dělení intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  tak, aby všechny dílky byly stejně velké a bylo jich  $n$ . Pak platí

$$x_i = 0 + i \cdot \frac{1-0}{n} = \frac{i}{n},$$

$$m_i = x_i = 0 + i \cdot \frac{1-0}{n} = \frac{i}{n},$$

$$M_i = x_{i+1} = 0 + (i+1) \cdot \frac{1-0}{n} = \frac{i+1}{n},$$

$$L(f, D) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \cdot (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot (0 + 1 + \dots + n - 1) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2n^2}.$$



Limitní přechod  $\nu(D) \rightarrow 0$  odpovídá přechodu  $n \rightarrow \infty$ . Dostáváme tak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

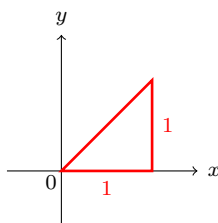
Obdobně spočítáme horní součet.

$$\begin{aligned} U(f, D) &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \cdot (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) = \frac{1}{n^2} \cdot (1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{2} (1+n) = \frac{n^2 + n}{2n^2}. \end{aligned}$$

Odtud pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(f, D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

Limita horních součtů pro  $n \rightarrow \infty$  je stejná jako limita dolních součtů. Tedy Riemannův integrál pro funkci  $y = x$  v intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  je rovný  $\frac{1}{2}$  a je shodný s výpočtem určitého integrálu podle Leibniz-Newtonovy formule (viz výše). Je také shodný s obsahem trojúhelníka (Obr. 8.2.2), tedy  $P = \frac{z \cdot v}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ . Ověřili jsme tak platnost Leibniz-Newtonovy formule pro konkrétní případ.



Obr. 8.2.2



Tento výsledek ukazuje na to, že určité integrály nebudeme muset počítat z jejich definice, ale můžeme k jejich výpočtu využít primitivní funkce (tzn. vypočítat neurčitý integrál a dosadit do něj integrační meze - viz příklad).

**Poznámka 8.2.2.** Abychom mohli používat Leibniz-Newtonovy formule, je nutné vědět, kdy je funkce integrace schopna.

Na to odpoví následující věta.

**Věta 8.2.2.**

Funkce spojitá na uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$  je tam integrace schopna.

**Poznámka 8.2.3.** Z věty 8.2.1 plyne ekvivalence Riemannovy a Newtonovy definice určitého integrálu pro případ, že  $f(x)$  je spojitá v  $\langle a, b \rangle$ .

**Poznámka 8.2.4.** Věta 8.2.1 jednak ukazuje na úzkou souvislost mezi určitým a neurčitým integrálem a jednak dává jednoduchou metodu pro výpočet určitého integrálu. Ukážeme si její použití na příkladech.



**Příklad 8.2.2.** Vypočítejte  $\int_1^4 x^3 dx$ .

**Řešení:**

$$\int_1^4 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_1^4 = \frac{256}{4} - \frac{1}{4} = \frac{255}{4}.$$

Integrate[x^3, {x, 1, 4}]

...  ...



**Příklad 8.2.3.** Vypočítejte  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ .

**Řešení:**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1.$$

...  ...

**Klíčová slova**

integrace v Newtonově smyslu, Leibniz-Newtonova formule

**8.3 Základní vlastnosti určitého integrálu****Věta 8.3.1 (O aditivnosti určitého integrálu).**

Nechť  $f(x)$  je spojitá funkce v intervalu  $I$  a dále  $a, b, c \in I$ . Potom platí

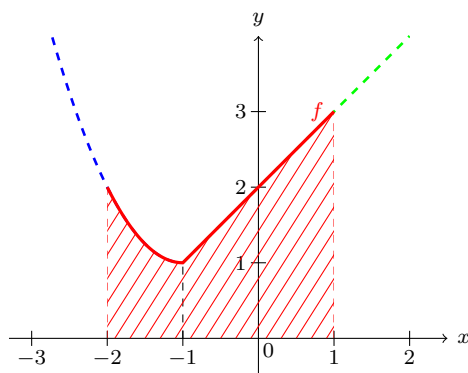
$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

**Příklad 8.3.1.** Vypočítejte  $\int_{-2}^1 f(x) dx$ , kde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & \text{pro } x \in (-\infty, -1), \\ x + 2 & \text{pro } x \in (-1, \infty). \end{cases}$$



**Řešení:**



Obr. 8.3.1

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 f(x) dx &= \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 + 2x + 2) dx + \\ &+ \int_{-1}^1 (x + 2) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x \right]_{-2}^{-1} + \left[ \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Integrate[x^2+2x+2, {x, -2, -1}]+Integrate[x+2, {x, -1, 1}]



**Poznámka 8.3.1.** Podle definice Riemannova integrálu víme, že jsme počítali obsah obrazce, který je na Obr. 8.3.1 vyznačen šrafováním.

**Věta 8.3.2.**

Nechť funkce  $f(x)$  a  $g(x)$  jsou spojité v intervalu  $I$  a necht' jsou dána čtyři čísla  $a, b \in I, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Potom platí

$$\int_a^b (c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x)) dx = c_1 \cdot \int_a^b f(x) dx + c_2 \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

**Důsledek 8.3.1.** Nechtě funkce  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  jsou spojité v intervalu  $I$  a nechtě jsou dána čísla  $a, b \in I, c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ . Pak platí

$$\begin{aligned} \int_a^b (c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) + \dots + c_n \cdot f_n(x)) dx &= \\ &= c_1 \cdot \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \cdot \int_a^b f_2(x) dx + \dots + c_n \cdot \int_a^b f_n(x) dx. \end{aligned}$$

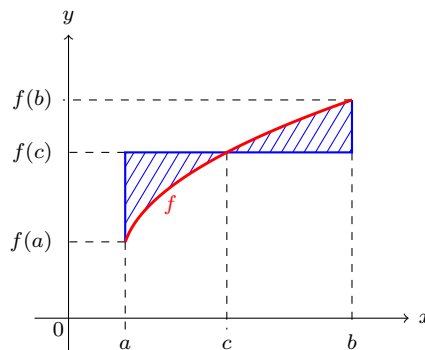
**Věta 8.3.3.**

Předpokládejme, že  $f(x)$  je funkce spojitá a nezáporná v intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom platí  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

**Věta 8.3.4** (Věta o střední hodnotě integrálního počtu).

Jestliže  $f(x)$  je funkce spojitá v intervalu  $\langle a, b \rangle$ , pak existuje takové číslo  $c \in (a, b)$ , že platí  $\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a)$ .

**Poznámka 8.3.2.** Jestliže je funkce  $f(x)$  nezáporná v intervalu  $\langle a, b \rangle$ , má věta 8.3.4 zajímavou geometrickou interpretaci. Integrál  $\int_a^b f(x) dx$ , jak víme, je obsahem obrazce určeného funkcí  $f(x)$  definovanou v  $\langle a, b \rangle$ . Číslo  $(b - a) \cdot f(c)$  je obsahem obdélníka o základně  $b - a$  a výšce  $f(c)$  (Obr. 8.3.2). Z obrázku dále plyne, že obsah vyšrafované části nalevo od bodu  $c$  je roven



Obr. 8.3.2

obsahu vyšrafované části napravo od bodu  $c$ .

**Poznámka 8.3.3.** Rozšířme definici integrálu  $\int_a^b f(x) dx$  i na případ, kdy  $a \geq b$ . Je-li  $f(x)$  definována v čísle  $a$ , klademe  $\int_a^a f(x) dx = 0$ . Je-li  $a > b$  a je-li  $f(x)$  integrace schopna na intervalu  $\langle b, a \rangle$ , klademe  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ . Je zřejmé, že i při této rozšířené definici integrálu platí všechny věty uvedené v tomto odstavci.

Domníváme se, že jste pochopili souvislost mezi určitým a neurčitým integrálem. Při výpočtu neurčitých integrálů jsme používali dvě základní integrační metody: metodu per partes a metodu substituční. Určitě vás bude zajímat, jak tyto metody použijeme u určitých integrálů. Jistě, mohli bychom postupovat podle Leibniz-Newtonovy formule, tj. nejprve najít primitivní funkci  $F(x)$  k původní funkci (k integrandu) a pak jen dosadit integrační meze. Někdy je však výhodné pracovat s mezemi tzv. „za pochodu“. Myslíme tím to, že v případě, že změním při substituční metodě proměnnou, změním odpovídajícím způsobem i meze integrálu. Podrobněji se těmito metodami budeme zabývat v následující kapitole.



### Klíčová slova

aditivnost určitého integrálu, střední hodnota integrálního počtu



## 8.4 Integrace per partes a metoda substituční pro určité integrály

### Věta 8.4.1 (Metoda per partes v určitém integrálu).

Nechť mají funkce  $u(x)$ ,  $v(x)$  v intervalu  $\langle a, b \rangle$  spojité derivace  $u'(x)$ ,  $v'(x)$ . Pak je

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

**Poznámka 8.4.1.** Stručněji lze metodu per partes zapsat takto

$$\int_a^b uv' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx.$$



**Příklad 8.4.1.** Vypočtete  $\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$ .

**Řešení:** Položme  $u(x) = x^2$ ,  $v'(x) = \sin x$ .

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x^2 \sin x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad v' = \sin x \\ u' = 2x \quad v = -\cos x \end{array} \right| = [-x^2 \cos x]_0^\pi + \\ &+ 2 \cdot \int_0^\pi x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad v' = \cos x \\ u' = 1 \quad v = \sin x \end{array} \right| = \\ &= \pi^2 + 2[x \sin x]_0^\pi - 2 \cdot \int_0^\pi \sin x \, dx = \pi^2 + 2[\cos x]_0^\pi = \pi^2 - 4. \end{aligned}$$

...  ...



**Příklad 8.4.2.** Vypočtete  $\int_0^1 2^x \cdot x \, dx$ .

**Řešení:** Položme  $u = x$ ,  $v' = 2^x$ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 2^x \cdot x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = x \quad v' = 2^x \\ u' = 1 \quad v = \frac{2^x}{\ln 2} \end{array} \right| = \left[ \frac{2^x \cdot x}{\ln 2} \right]_0^1 - \frac{1}{\ln 2} \cdot \int_0^1 2^x \, dx = \\ &= \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot [2^x]_0^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{2}{\ln^2 2} + \frac{1}{\ln^2 2} = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2}. \end{aligned}$$

...  ...

**Věta 8.4.2** (Substituční metoda v určitém integrálu).

Nechť  $f(t)$  je spojitá funkce na intervalu  $\langle \alpha, \beta \rangle$ . Nechť funkce  $g(x)$  má spojitou derivaci v intervalu  $\langle a, b \rangle$  a zobrazuje tento interval do intervalu  $\langle \alpha, \beta \rangle$  a současně  $g(a) = \alpha$ ,  $g(b) = \beta$ . Potom platí

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t) = F(\beta) - F(\alpha).$$

**Poznámka 8.4.2.** Schéma použití věty je obdobné jako u neurčitého integrálu. V integrálu  $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$  položíme  $g(x) = t$ ,  $g'(x)dx = dt$ , musíme však také transformovat meze integrálu podle rovnic  $g(a) = \alpha$ ,  $g(b) = \beta$ . Postup je ukázán v následujících dvou příkladech.



**Příklad 8.4.3.** Vypočtete  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} \, dx$ .

**Řešení:** Substituce  $\sin x = t$ ,  $\cos x \, dx = dt$  převádí meze integrálu takto

$$\begin{array}{c|cc} x & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{2} \\ \hline t = \sin x & \frac{1}{2} & 1 \end{array}$$

Pomocí rovnosti  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$  upravíme integrand a zavedeme substituci

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} \, dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{\sin^6 x} \, dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-t^2}{t^6} \, dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (t^{-6} - t^{-4}) \, dt = \\ &= \left[ -\frac{1}{5t^5} + \frac{1}{3t^3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{32}{5} - \frac{8}{3} = \frac{58}{15}. \end{aligned}$$

...  ...

**Příklad 8.4.4.** Vypočtěte  $\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \, dx$ .



**Řešení:**

$$\begin{array}{lcl} x^2 + 1 & = & t^2 \\ 2x \, dx & = & 2t \, dt \\ x \, dx & = & t \, dt \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline t = \sqrt{x^2+1} & \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{array}$$

$$\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \, dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{t}{t^3} \, dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} t^{-2} \, dt = \left[ -\frac{1}{t} \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

...  ...

**Poznámka 8.4.3.** Jistě jste si všimli, že jsme zavedli substituci  $x^2 + 1 = t^2$  místo očekávané  $x^2 + 1 = t$ . Udělali jsme to proto, abychom se vyhnuli integrálu s racionálním mocnitelem. Vypočtěte zadaný integrál pomocí substituce  $x^2 + 1 = t$  a oba výpočty porovnejte.

**Klíčová slova**

metoda per partes, substituční metoda



## 8.5 Aplikace určitého integrálu v geometrii

Při výkladu Riemannova určitého integrálu jste si jistě všimli, že se dá v geometrii aplikovat především pro výpočet obsahů rovinných obrazců. Dále se budeme zabývat i určením objemů některých těles, výpočtem délek rovinných křivek a obsahů rotačních ploch.

### 8.5.1 Obsah rovinného obrazce

#### a) Příklad kartézských souřadnic

Nechť funkce  $f(x)$  je nezáporná a integrabilní na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Uvažujme rovinný obrazec omezený osou  $x$  ( $y = 0$ ), přímkami  $x = a$ ,  $x = b$  a křivkou  $y = f(x)$ . Pomocí dolních a horních součtů nebo i integrálních součtů jsme zavedli pro obsah  $P$  uvedeného obrazce (v literatuře se setkáte také s pojmy jako **podgraf funkce  $f$ , křivočarý lichoběžník**) vztah

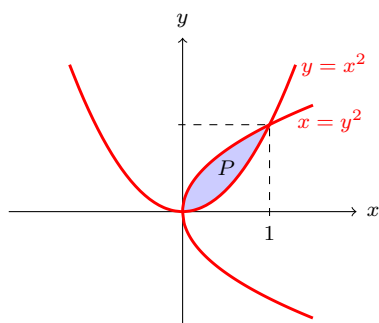
podgraf funkce  $f$ ,  
křivočarý lichoběžník

$$P = \int_a^b f(x) dx. \quad (8.5.1)$$

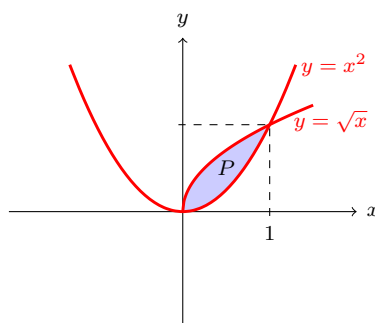


**Příklad 8.5.1.** Vypočtete obsah rovinného obrazce omezeného parabolami  $y = x^2$ ,  $x = y^2$ .

**Řešení:** Rovinné obrazce na Obr. 8.5.1, 8.5.2 jsou naprosto stejné. Vy-



Obr. 8.5.1



Obr. 8.5.2

užijeme Obr. 8.5.2, kde funkce  $y = \sqrt{x}$  představuje horní větev paraboly  $x = y^2$  vzhledem k dosazení funkce  $y = f(x)$  do (8.5.1) pro výpočet obsahu  $P$  rovinného obrazce.

$$P = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$



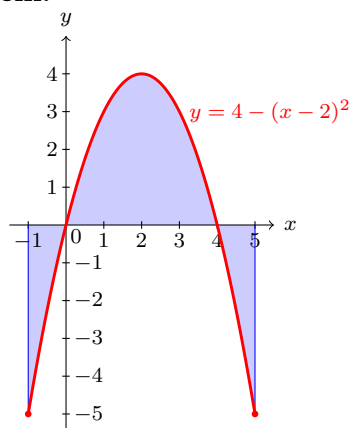
Při výpočtu obsahu rovinných obrazců si musíme uvědomit jednu skutečnost a sice to, že vzorec (8.5.1) pro výpočet obsahu tohoto obrazce platí pouze pro případ nezáporné funkce. Jak budeme postupovat v případě, že k vymezení rovinného obrazce je použita i záporná funkce, uvidíte v následujícím příkladu.



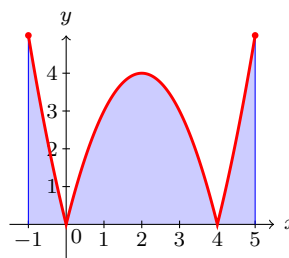
**Příklad 8.5.2.** Určete obsah rovinného obrazce omezeného osou  $x$ , přímkami  $x = -1$ ,  $x = 5$  a grafem funkce  $y = 4 - (x - 2)^2$ . Zadaný obrazec vyšrafujte.



**Řešení:**



Obr. 8.5.3



Obr. 8.5.4

Z Obr. 8.5.3 je vidět, že funkce  $y = 4 - (x - 2)^2$  není na celém integračním intervalu nezáporná. V intervalech  $\langle -1, 0 \rangle$  a  $\langle 4, 5 \rangle$  jsou funkční hodnoty funkce  $y = 4 - (x - 2)^2$  záporné, proto budou odpovídající „proužky“ v dolních a horních součtech rovněž přispívat zápornými hodnotami. Obsah obrazce je však vždy kladný. Kdybychom v těchto intervalech provedli reflexi kolem osy  $x$  (ze znalostí o transformacích grafů funkcí víme, že k tomu stačí použít v těchto intervalech funkci  $y = -(4 - (x - 2)^2) = (x - 2)^2 - 4$  - viz Obr. 8.5.4), měli bychom na všech podintervalech nezáporné funkce. S využitím věty 8.3.1 nyní zadaný obsah obrazce lehce vypočítáme takto:

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{-1}^0 ((x - 2)^2 - 4) dx + \int_0^4 (4 - (x - 2)^2) dx + \int_4^5 ((x - 2)^2 - 4) dx = \\
 &= \int_{-1}^0 (x^2 - 4x) dx + \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx + \int_4^5 (x^2 - 4x) dx = \\
 &= \left[ \frac{x^3}{3} - 2x^2 \right]_{-1}^0 + \left[ -\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^4 + \left[ \frac{x^3}{3} - 2x^2 \right]_4^5 = \\
 &= \frac{1}{3} + 2 - \frac{64}{3} + 32 + \frac{125}{3} - 50 - \frac{64}{3} + 32 = 16 - \frac{2}{3} = \frac{46}{3}.
 \end{aligned}$$

V podintervalech, ve kterých je funkce záporná, se dá také, místo reflexe,

použít absolutní hodnota. V tom případě bychom postupovali takto:

$$\begin{aligned} P &= \left| \int_{-1}^0 (4 - (x-2)^2) dx \right| + \int_0^4 (4 - (x-2)^2) dx + \left| \int_4^5 (4 - (x-2)^2) dx \right| = \\ &= \left| \left[ -\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_{-1}^0 \right| + \left[ -\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^4 + \left| \left[ -\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_4^5 \right| = \\ &= \left| -\frac{1}{3} - 2 \right| - \frac{64}{3} + 32 + \left| -\frac{125}{3} + 50 + \frac{64}{3} - 32 \right| = \frac{46}{3}. \end{aligned}$$

Kdybychom si neuvědomili, že funkce je na integračním intervalu i záporná, počítali bychom nejspíše takto:

$$P = \int_{-1}^5 (4 - (x-2)^2) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_{-1}^5 = -\frac{125}{3} + 50 + \frac{1}{3} - 2 = \frac{20}{3}.$$

Ověříme pomocí softwaru **Mathematica**, který výsledek je správný:

`Integrate[Abs[(x-2)^2-4],{x,-1,5}]`

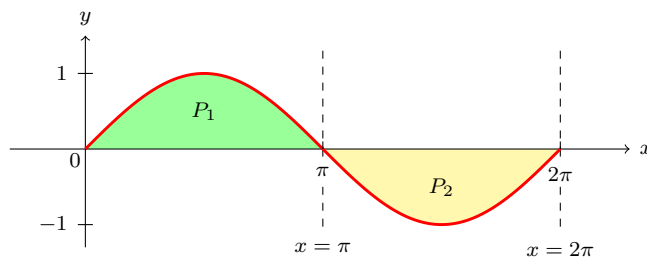


Vidíme, jak důležité je v tomto případě znát průběhy funkcí.



**Příklad 8.5.3.** Vypočítejte obsah obrazce omezeného osou  $x$ , funkcí  $y = \sin x$  a přímkami  $x = 0$ ,  $x = 2\pi$ . Obrázek načrtněte (označte  $P_1$  rovinný obrazec omezený osou  $x$ , funkcí  $y = \sin x$  a přímkami  $x = 0$ ,  $x = \pi$  a  $P_2$  rovinný obrazec omezený osou  $x$ , funkcí  $y = \sin x$  a přímkami  $x = \pi$ ,  $x = 2\pi$ ).

**Řešení:** Z Obr. 8.5.5 je vidět, že funkce  $y = \sin x$  je v integračním



Obr. 8.5.5

intervalu i záporná. Jistě dovedete odhadnout výsledek v případě, že bychom chtěli počítat z neznalosti situace obsah obrazce takto:

$$P = \int_0^{2\pi} \sin x dx.$$

Jistě je roven nule. V případě, že v obrazci jsou některé části stejné, není nutné počítat integrál přes všechny podintervaly. V našem případě např. stačí vypočítat obsah obrazce  $P_1$  (viz. Obr. 8.5.5) a ten vynásobit dvěma, protože obsah obrazce  $P_2$  je stejný. Tedy

$$P = 2 \cdot P_1 = 2 \cdot \int_0^\pi \sin x \, dx = 2 \cdot [-\cos x]_0^\pi = 2(-(-1) + 1) = 4.$$



Uměli byste vypočítat obsah rovinného obrazce omezeného osou  $y$ , funkcí  $x = g(y)$  a přímkami  $y = c$ ,  $y = d$ ?

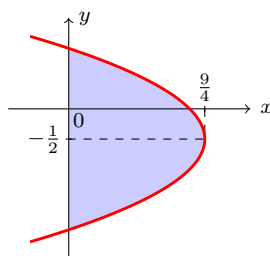
Zřejmě bychom mohli postupovat analogicky k vzorci (8.5.1) pro výpočet obsahu rovinného obrazce omezeného funkcí  $y = f(x)$ , přímkami  $x = a$ ,  $x = b$  a osou  $x$ . Vzorec tedy vypadá takto:

$$P = \int_c^d g(y) \, dy.$$

**Příklad 8.5.4.** Vypočítejte obsah rovinného obrazce omezeného parabolou  $x = 2 - y - y^2$  a osou  $y$ .



**Řešení:** Určíme průsečíky paraboly s osou  $y$  ( $x = 0$ ) a vrchol paraboly  $V = [m, n]$ . Viz Obr. 8.5.6.



Obr. 8.5.6

$$\text{průsečíky s osou } y: \quad 2 - y - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

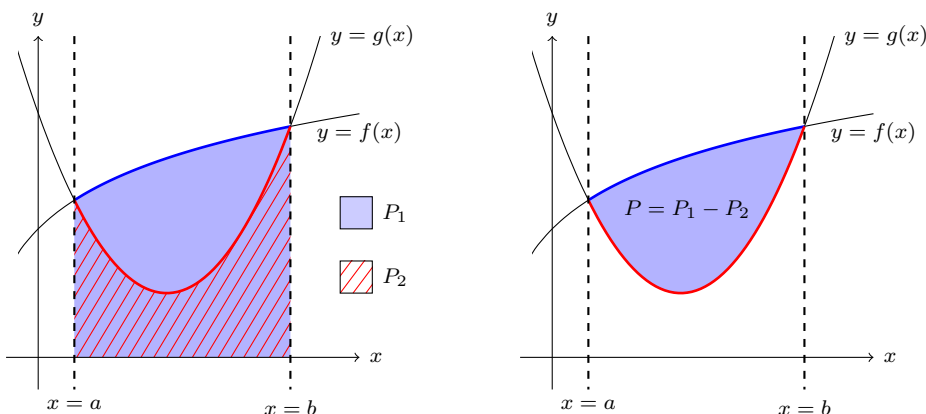
$$\begin{aligned} \text{vrchol paraboly: } \quad x &= 2 - y - y^2 = -\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \\ x - \frac{9}{4} &= -\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad V = \left[\frac{9}{4}, -\frac{1}{2}\right]. \end{aligned}$$

Vypočteme obsah

$$P = \int_{-2}^1 (2 - y - y^2) dy = \left[ 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3} = \frac{9}{2}.$$



V příkladu 8.5.1 jsme počítali obsah rovinného obrazce mezi dvěma křivkami. V případě, že obě funkce jsou nezáporné, je výpočet zřejmý. Odvodíme si jej z obrázku 8.5.7.



Obr. 8.5.7

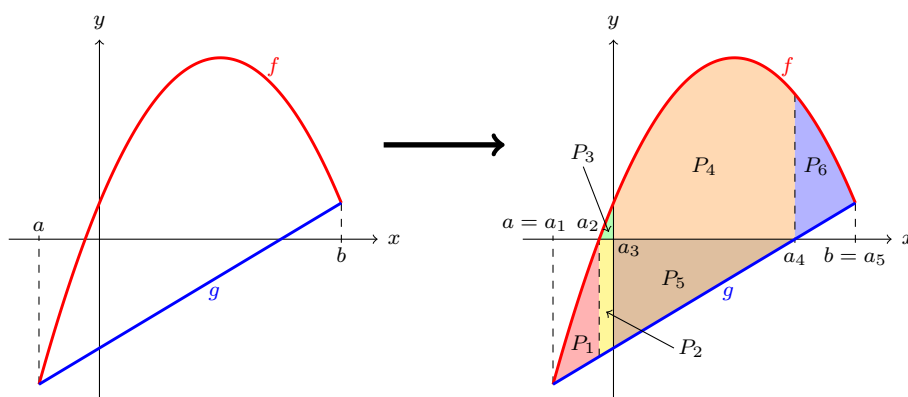
Zřejmě tedy platí

$$P = P_1 - P_2 = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx,$$

což je vzorec, který budeme v těchto případech používat. Dá se použít i na následující případ?



**Příklad 8.5.5.** Pokuste z obrázku 8.5.8 odvodit výpočet obsahu rovinného obrazce. Dá použít vzorec  $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ ?



Obr. 8.5.8

**Řešení:** Z Obr. 8.5.8 plyne

$$\begin{aligned}
 P &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = \int_{a_1}^{a_2} \left( -g(x) - (-f(x)) \right) dx + \\
 &+ \int_{a_2}^{a_3} (-g(x)) dx + \int_{a_2}^{a_3} f(x) dx + \int_{a_3}^{a_4} f(x) dx + \int_{a_3}^{a_4} (-g(x)) dx + \\
 &+ \int_{a_4}^{a_5} (f(x) - g(x)) dx = \int_{a_1}^{a_2} (f(x) - g(x)) dx + \int_{a_2}^{a_3} (f(x) - g(x)) dx + \\
 &+ \int_{a_3}^{a_4} (f(x) - g(x)) dx + \int_{a_4}^{a_5} (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.
 \end{aligned}$$

Pokud platí na celém intervalu  $\langle a, b \rangle$  pro funkce  $f(x)$ ,  $g(x)$  vztah  $g(x) \leq f(x)$ , přičemž funkce  $f(x)$ ,  $g(x)$  nemusí být nutně nezáporné, lze obsah rovinného obrazce mezi těmito dvěma funkcemi vypočítat takto:

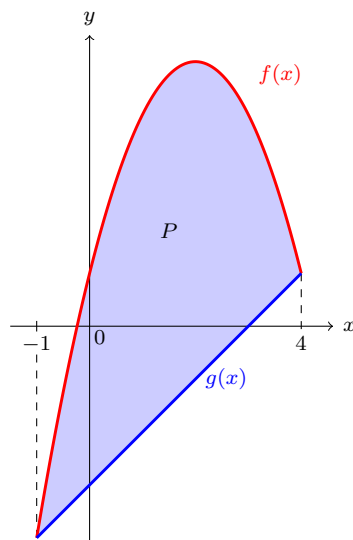
$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$



**Příklad 8.5.6.** Určete obsah obrazce omezeného křivkou  $f(x) = 5 - (x-2)^2$  a přímkou  $g(x) = x - 3$ . Obrazec načrtněte.



**Řešení:** Nejprve zjistíme průsečíky křivek. Zřejmě bude nutné vyřešit rovnici  $5 - (x-2)^2 = x - 3$ . Po úpravě získáme kvadratickou rovnici ve tvaru  $x^2 - 3x - 4 = 0$ , tj.  $(x-4)(x+1) = 0$ . Kořeny tedy jsou  $x = 4$ ,  $x = -1$ . Zadaný obrazec je na Obr. 8.5.9.



Obr. 8.5.9

Obsah obrazce vypočítáme podle výše uvedené teorie takto:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^4 (5 - (x-2)^2 - (x-3)) dx = \\
 & = \int_{-1}^4 (-x^2 + 3x + 4) dx = \\
 & = \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 4x \right]_{-1}^4 = \\
 & = \left( -\frac{64}{3} + 24 + 16 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 \right) = \\
 & = 44 + \frac{-128 - 2 - 9}{6} = \\
 & = 44 - \frac{139}{6} = \frac{125}{6}.
 \end{aligned}$$

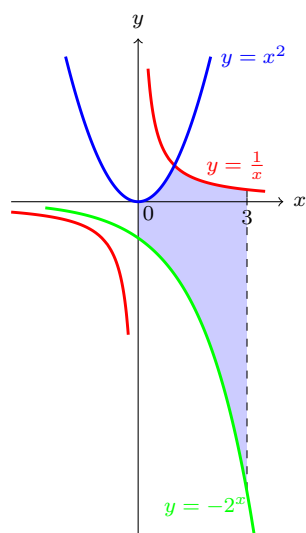
... ☺ ...

Jistě je vám už zcela zřejmé, jak bychom vypočítali obsah obrazce omezeného několika grafy. Pokusíme se o to v následujícím příkladu.



**Příklad 8.5.7.** Vypočtete obsah obrazce omezeného těmito grafy:  $y = -2^x$ ,  $y = x^2$ ,  $y = \frac{1}{x}$  a přímkami  $x = 0$  a  $x = 3$ . Načrtněte obrázek.

**Řešení:**



Obr. 8.5.10

Rovinný obrazec si rozdělíme na dva,  $P_1$  a  $P_2$ . Jak je z Obr. 8.5.10 vidět, bude nutné určit průsečík křivek  $y = x^2$ ,  $y = \frac{1}{x}$ . Získáme jej řešením rovnice  $x^2 = \frac{1}{x}$ . Tedy

$$\begin{aligned}
 x^3 = 1 & \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0.
 \end{aligned}$$

Odtud  $x = 1$ .

Z nám již známé teorie plyne, že

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 = \int_0^1 (x^2 - (-2^x)) dx + \int_1^3 \left( \frac{1}{x} - (-2^x) \right) dx = \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{2^x}{\ln 2} \right]_0^1 + \left[ \ln |x| + \frac{2^x}{\ln 2} \right]_1^3 = \frac{1}{3} + \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} + \ln 3 + \\ &+ \frac{8}{\ln 2} - \ln 1 - \frac{2}{\ln 2} = \frac{1}{3} + \ln 3 + \frac{7}{\ln 2}. \end{aligned}$$

...  ...

### b) Příklad parametrických rovnic

Uvažujme situaci, kdy je graf nezáporné funkce  $f(x)$ ,  $x \in \langle a, b \rangle$ , popsán parametrickými rovnicemi  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ . Předpokládáme-li, že funkce  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  jsou spojité,  $\psi(t) \geq 0$  v  $\langle \alpha, \beta \rangle$  a funkce  $\varphi(t)$  má v  $\langle \alpha, \beta \rangle$  spojitou derivaci, různou od nuly, pak lze ve vzorci (8.5.1) zavést substituci  $x = \varphi(t)$ ,  $dx = \varphi'(t)dt$  ( $a = \varphi(\alpha)$ ,  $b = \varphi(\beta)$ ). Dostaneme následující vzorec pro výpočet obsahu podgrafu funkce  $f(x)$

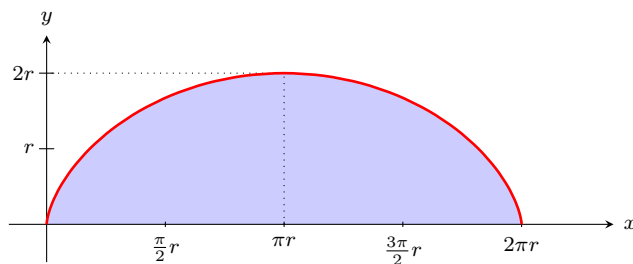
$$P = \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)\varphi'(t)| dt. \quad (8.5.2)$$

Stejnou substituci budeme zavádět i v dalších aplikacích.

**Příklad 8.5.8.** Určete obsah obrazce omezeného osou  $x$  a jedním obloukem cykloidy  $x = r(t - \sin t)$ ,  $y = r(1 - \cos t)$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .



**Řešení:** Na Obr. 8.5.11 vidíme zadaný obrazec, plochu pod obloukem cykloidy. Způsob, jakým cykloida vzniká, naleznete v [grafu 8.5.1](#).



Obr. 8.5.11

Ze zadání  $x = \varphi(t) = r(t - \sin t)$  plyne, že  $\varphi'(t) = r(1 - \cos t)$ . Dosazením do vzorce (8.5.2) vypočítáme obsah

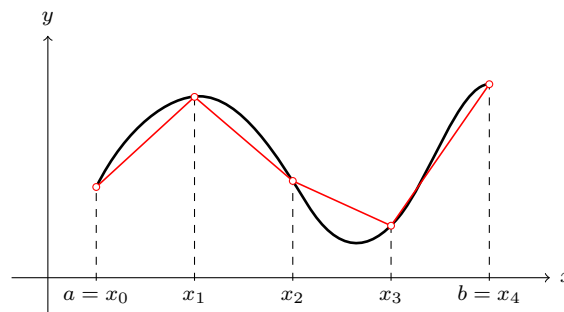
$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^{2\pi} r(1 - \cos t)r(1 - \cos t) dt = r^2 \cdot \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \\
 &= r^2 \cdot \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = r^2 \cdot \left[ t - 2 \sin t + \frac{t + \sin t \cos t}{2} \right]_0^{2\pi} = \\
 &= r^2 \cdot \left( 2\pi + \frac{2\pi}{2} \right) = 3\pi r^2.
 \end{aligned}$$



### 8.5.2 Délka rovinné křivky

#### a) Příklad kartézských souřadnic

Nechť  $y = f(x)$  je funkce definovaná na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a mající zde spojitou derivaci. Buď  $D : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$ .



Obr. 8.5.12

Dělicí body určují body  $T_i = [x_i, f(x_i)]$  grafu funkce  $y = f(x)$ . Spojme každé dva sousední body úsečkou (Obr. 8.5.12). Délka  $i$ -té úsečky je

$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Podle věty o střední hodnotě (věta 8.3.4) existuje  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$  tak, že  $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$ . Pak  $i$ -tá úsečka má délku

$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}))^2} = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

a délka celé vepsané lomené čáry je

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum (D, \sqrt{1 + f'^2}, E),$$



kde  $E$  značí množinu všech čísel  $\xi_i$ . Tato suma vyjadřuje délku uvažované křivky tím přesněji, čím je jemnější dělení  $D$ . **Délku  $L$  dané křivky v rovině** pak definujeme

délka křivky v rovině

$$L = \lim_{\nu(D) \rightarrow 0} \sum (D, \sqrt{1 + f'^2}, E) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

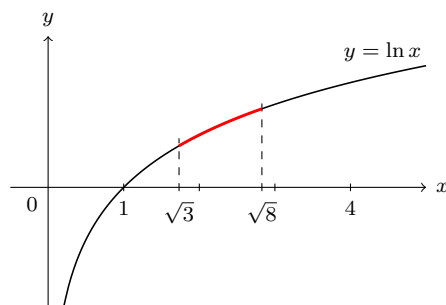
**Příklad 8.5.9.** V [prezentaci 8.5.1](#) naleznete ukázkou, jak je křivka  $f(x) = -x^2 + 4x$  na intervalu  $\langle 0, 4 \rangle$  nahrazována lineární lomenou čarou při zjemňujícím se dělení daného intervalu.



**Příklad 8.5.10.** Určete délku rovinné křivky  $y = \ln x$  mezi body  $x_1 = \sqrt{3}$ ,  $x_2 = \sqrt{8}$ .



**Řešení:**



Obr. 8.5.13

$$\begin{aligned} L &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} dx = \\ &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1 + x^2} \cdot x}{x^2} dx = \end{aligned}$$

substituce: $x^2 + 1 = t^2$	meze: $x \mid \sqrt{3} \quad \sqrt{8}$
$2x dx = 2t dt$	$t \mid 2 \quad 3$
$x dx = t dt$	

$$\begin{aligned}
&= \int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1} dt = \int_2^3 \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt = \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt = \\
&= \int_2^3 dt + \frac{1}{2} \cdot \int_2^3 \frac{(t+1) - (t-1)}{(t+1)(t-1)} dt = [t]_2^3 + \frac{1}{2} \cdot \int_2^3 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \\
&= 1 + \frac{1}{2} \cdot [\ln(t-1) - \ln(t+1)]_2^3 = 1 + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 4 + \frac{1}{2} \ln 3 = \\
&= 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$



### b) Příklad parametrických rovnic

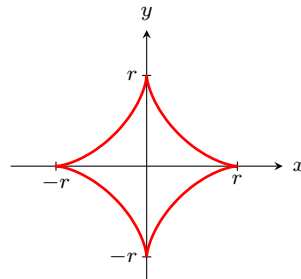
Uvažujme parametrické rovnice  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ , křivky určené grafem funkce  $f$ . Pak délka křivky je dána vztahem

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$



**Příklad 8.5.11.** Vypočítejte délku křivky (asteroidy) určené rovnicemi  $x = r \cos^3 t$ ,  $y = r \sin^3 t$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .

**Řešení:** Na Obr. 8.5.14 vidíme zadanou křivku, kterou nazýváme asteroida. Způsob, jakým asteroida vzniká, naleznete v [grafu 8.5.2](#).



Obr. 8.5.14

Ze zadání plyne, že  $\varphi'(t) = -3r \cos^2 t \sin t$ ,  $\psi'(t) = 3r \sin^2 t \cos t$ . Délku zadané křivky pak vypočítáme takto

$$\begin{aligned} L &= 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9r^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9r^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 12r \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = \\ &= 12r \cdot \int_0^1 u du = 12r \cdot \left[ \frac{u^2}{2} \right]_0^1 = 6r. \end{aligned}$$

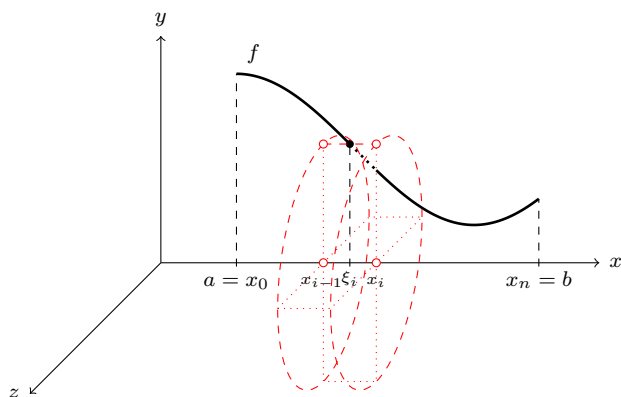


### 8.5.3 Objem rotačního tělesa

#### a) Příklad kartézských souřadnic

Nechť  $f(x)$  je nezáporná spojitá funkce definovaná na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Uvažujme rotační těleso, jenž vznikne, otáčí-li se rovinný obrazec omezený osou  $x$ , přímkami  $x = a$ ,  $x = b$  a křivkou  $y = f(x)$  kolem osy  $x$ : [Prezentace 8.5.2](#)

Zvolme dělení  $D : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  intervalu  $\langle a, b \rangle$ , a reprezentanty dělicích intervalů  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Pro každé  $i$  nahradíme část rotačního tělesa příslušející souřadnicím  $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$  rotačním válcem o poloměru podstavy  $f(\xi_i)$  a výšce  $x_i - x_{i-1}$  (Obr. 8.5.15).



Obr. 8.5.15

Sečteme-li objemy všech těchto rotačních válců, dostaneme číslo

$$\sum_{i=1}^n \pi f^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

což je integrální součet odpovídající funkci  $\pi f^2$ , dělení  $D$  a nějakému výběru reprezentantů  $E$ . Provedeme-li nám již známý limitní přechod z definice Riemannova integrálu, dostaneme vzorec pro výpočet **objemu rotačního tělesa**

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx.$$

objem rotačního tělesa



**Příklad 8.5.12.** Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací obrazce omezeného grafy funkcí  $y = 0$ ,  $y = 1$ , přímkami  $x = 1$ ,  $x = 3$  kolem osy  $x$ .

**Řešení:** Není těžké si představit zadaný obrazec i těleso vzniklé jeho rotací kolem osy  $x$ . Zkuste si je nejprve sami načrtnout a pak se podívejte do [grafu 8.5.3](#). Vypočítáme objem:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx = \pi \cdot \int_1^3 1^2 dx = \pi \cdot [x]_1^3 = 2\pi.$$

... ...



**Příklad 8.5.13.** Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací obrazce omezeného grafy funkcí  $y = 0$ ,  $y = -\frac{1}{2}x + 2$ , přímkami  $x = 0$ ,  $x = 3$  kolem osy  $x$ .

**Řešení:** Daný obrazec i těleso vzniklé jeho rotací kolem osy  $x$  naleznete v [grafu 8.5.4](#). Vypočítáme objem:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^3 \left(-\frac{1}{2}x + 2\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^3 \left(\frac{1}{4}x^2 - x + 4\right) dx = \\ &= \pi \cdot \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2} + 4x\right]_0^3 = \pi \cdot \left(\frac{27}{12} - \frac{9}{2} + 12\right) = \frac{39}{4}\pi. \end{aligned}$$

... ...

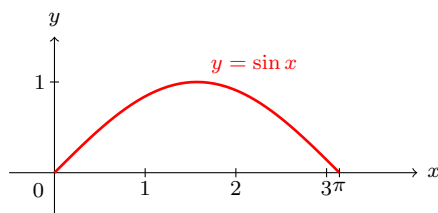


**Příklad 8.5.14.** Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací křivky  $y = \sin x$  pro  $x \in (0, \pi)$  kolem osy  $x$  (Obr. 8.5.16, [Graf 8.5.5](#)).

**Řešení:**

$$V = \pi \cdot \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \cdot \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

... ...



Obr. 8.5.16

### b) Příklad parametrických rovnic

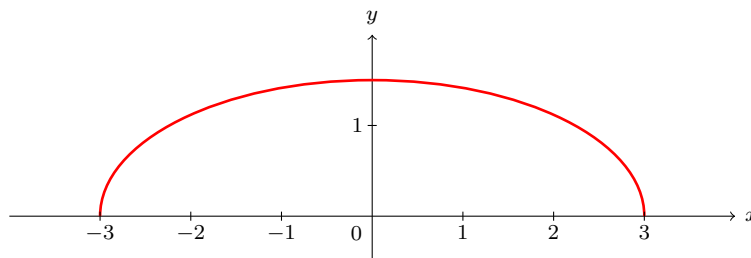
Objem tělesa vzniklého rotací křivky  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$  kolem osy  $x$  se vypočítá podle vzorce

$$V = \pi \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \cdot |\varphi'(t)| dt.$$

**Příklad 8.5.15.** Vypočítejte objem tělesa vzniklého rotací křivky  $\varphi(t) = 3 \cos t$ ,  $\psi(t) = \frac{3}{2} \sin t$ ,  $t \in \langle 0, \pi \rangle$  kolem osy  $x$  (Obr. 8.5.17 – horní půlelipsa).



**Řešení:**



Obr. 8.5.17

Platí  $\varphi'(t) = -3 \sin t$  pro  $t \in (0, \pi)$ , dosadíme do vzorce

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2}\right)^2 \sin^2 t \cdot |-3 \sin t| dt = \frac{27}{4} \pi \cdot \int_0^{\pi} \sin^3 t dt = \\ &= \frac{27}{4} \pi \cdot \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t) \sin t dt = \frac{27}{4} \pi \cdot \int_{-1}^1 (1 - u^2) du = 9\pi \end{aligned}$$

Zadané rotační těleso lze vykreslit pomocí softwaru **Mathematica**:

```
RevolutionPlot3D[{1.5Sin[t], 3Cos[t]}, {t, 0, Pi},
```

AxisLabel -> {y, z, x}].

Uvedený příkaz vykreslí rotační těleso vzniklé rotací křivky zadané parametricky. Vzhledem k základní syntaxi příkazu RevolutionPlot3D jsme vyměnili rovnice pro  $x$  a  $y$ , jinak by výsledkem bylo těleso rotující kolem osy  $y$ . Pro lepší orientaci sledujte označení jednotlivých os.



### 8.5.4 Plášť rotačního tělesa

#### a) Příklad kartézských souřadnic

Nechť  $f(x)$  je spojitá nezáporná funkce se spojitou derivací na  $\langle a, b \rangle$ . Otáčeli se rovinný obrazec omezený přímkami  $x = a$ ,  $x = b$ , osou  $x$  a křivkou  $y = f(x)$  kolem osy  $x$ , vznikne rotační těleso. Obsah jeho pláště (bez obou podstav, existují-li) vypočítáme pomocí následujícího vzorce

$$S = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

obsah pláště  
rotačního tělesa



**Příklad 8.5.16.** Vypočtete obsah kulového pásu vzniklého rotací grafu funkce  $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$  kolem osy  $x$ . Předpokládá se, že  $-R < x_1 < x_2 < R$ .

**Řešení:** Graf 8.5.6.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = \\ &= 2\pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \\ &= 2\pi R \cdot \int_{x_1}^{x_2} dx = 2\pi R(x_2 - x_1) = 2\pi Rv, \end{aligned}$$

kde  $v$  je vzdálenost bodů  $x_1$ ,  $x_2$  („výška“ kulového pásu).



**Poznámka 8.5.1.** Je-li  $x_1 = -R$ ,  $x_2 = R$ , pak  $v = 2R$  a z předcházejícího výsledku dostaneme limitním přechodem (derivace  $f'(x)$  není pro  $\pm R$  definována) známý vzorec pro výpočet povrchu koule,  $S = 4\pi R^2$ .

**b) Příklad parametrických rovnic**

Je-li funkce  $f$  zadána parametrickými rovnicemi  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ , lze plášť rotačního tělesa vypočítat takto

$$S = 2\pi \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

**Příklad 8.5.17.** Vypočtěte obsah plochy vzniklé rotací křivky  $x = R \cdot \cos t$ ,  $y = R \cdot \sin t$  ( $R > 0$ ),  $t \in \langle 0, \pi \rangle$  kolem osy  $x$ .



**Řešení:** Všimněte si, že parametrickými rovnicemi je zadána horní půlkružnice o poloměru  $R$  a rotací vznikne opět kulová plocha, jako v předcházejícím příkladě.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \cdot \int_0^{\pi} R \sin t \cdot \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = 2\pi R^2 \cdot \int_0^{\pi} \sin t dt \\ &= 2\pi R^2 \cdot [-\cos t]_0^{\pi} = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

**Klíčová slova**

podgraf funkce, obsah obrazce, délka rovinné křivky, objem rotačního tělesa, obsah pláště rotačního tělesa

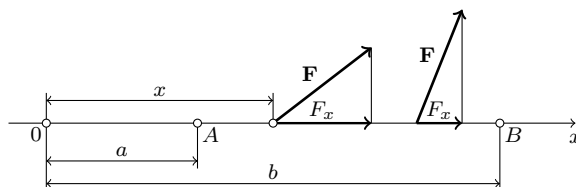
**8.6 Aplikace určitého integrálu ve fyzice**

V této části uvedeme některé jednoduché příklady aplikací určitého integrálu ve fyzice. Jejich odvození naleznete např. v knize [16].

**a) Práce proměnné síly po dané dráze.**

Předpokládejme, že v bodech úsečky  $AB$ , která leží v ose  $x$ , působí síla  $\mathbf{F}$ , která má s osou  $x$  souhlasnou orientaci a závisí na  $x$ -ové souřadnici působíště síly,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x)$  (Obr. 8.6.1). Mění-li se síla v závislosti na proměnné  $x$ , mění se i její  $x$ -ová souřadnice  $F_x$ , tedy je funkcí proměnné  $x$ ,  $F_x = f(x)$ . Definujme práci  $W$ , kterou vykonává proměnná síla  $\mathbf{F}$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  určitým integrálem z funkce  $f(x)$

$$W = \int_a^b f(x) dx.$$



Obr. 8.6.1

### b) Určení statických momentů a těžiště rovinných útvarů.

Připomeňme si, jak jsou ve fyzice definovány hmotný bod, statický moment a těžiště soustavy hmotných bodů. Pro přesnější pochopení pojmu si vyhledejte příslušnou literaturu.

**Hmotným bodem** rozumíme bod  $B$ , jemuž je přiřazeno určité kladné číslo  $m$  vyjadřující velikost hmoty v něm soustředěné. Je to objekt, jehož rozměry a tvar jsou zanedbatelné, ale tento objekt má přiřazenu hmotnost o určité velikosti. Uvažujme nyní pravouhý souřadnicový systém v rovině. Nechť  $B$  je hmotný bod o hmotě  $m$  a souřadnicích  $(x_0, y_0)$ . **Statický moment**  $S_x$  tohoto hmotného bodu **vzhledem k ose  $x$**  definujeme rovností  $S_x = m \cdot y_0$  a statický moment  $S_y$  vzhledem k ose  $y$  definujeme rovností  $S_y = m \cdot x_0$ .

Jestliže máme dānu soustavu konečně mnoha hmotných bodů  $B_1, B_2, \dots, B_k$  o hmotách  $m_1, m_2, \dots, m_k$  s dvojicemi souřadnic  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$ , statický moment  $S_x$  vzhledem k ose  $x$  a statický moment  $S_y$  vzhledem k ose  $y$  této soustavy je definovaný rovností

$$S_x = \sum_{i=1}^k m_i y_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^k m_i x_i.$$

**Těžištěm soustavy hmotných bodů** nazýváme takový bod, že soustředíme-li v něm hmotu celé soustavy,

$$M = \sum_{i=1}^k m_i,$$

pak statické momenty tohoto hmotného bodu vzhledem k jednotlivým osám jsou stejné jako statické momenty celé soustavy bodů. Těžištěm soustavy tak rozumíme bod  $T = [x_t, y_t]$ , pro který platí

$$x_t = \frac{S_y}{M}, \quad y_t = \frac{S_x}{M}.$$



U geometrických objektů jako jsou křivka v rovině nebo rovinný obrazec, lze definovat statický moment a souřadnice těžiště obdobným způsobem, přičemž součty jsou „nahrazeny“ integrály. Budeme předpokládat, že tyto objekty mají určitou hmotu (hmotné křivce odpovídá fyzikální představa tenkého drátu apod.) a jejich hustota (tj. hmoty na jednotku délky, popř. plochy) obecně nemusí být konstantní (je funkcí proměnné  $x$ , resp. parametru  $t$ ).

### α) Statický moment a těžiště oblouku křivky.

Uvažujme v rovině křivku  $y = f(x)$  pro  $x \in \langle a, b \rangle$  (představující hmotné těleso, např. tenký drát), kde  $f(x)$  má spojitou derivaci na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Předpokládejme, že hmotnost jednotky délky, tj. délková hustota, je spojitou funkcí proměnné  $x$ , označme ji např.  $s(x)$ . Tzn., že v bodě  $[x, f(x)]$  je hustota materiálu  $s(x)$ . Celková hmotnost tělesa (hmota křivky) se spočítá pomocí vzorce

$$M = \int_a^b s(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,$$

statické momenty vzhledem k souřadným osám vzorci

$$S_x = \int_a^b s(x)f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \quad S_y = \int_a^b s(x)x\sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Souřadnice těžiště  $T = [x_t, y_t]$  jsou dány již zmíněnými vzorci

$$x_t = \frac{S_y}{M}, \quad y_t = \frac{S_x}{M}.$$

Je-li křivka dána parametricky  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ , kde  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  mají spojitě derivace na  $\langle \alpha, \beta \rangle$  a pro  $t_1 \neq t_2$  je  $[\varphi(t_1), \psi(t_1)] \neq [\varphi(t_2), \psi(t_2)]$ , a je-li její hustota dána spojitou funkcí  $s(t)$  na  $\langle \alpha, \beta \rangle$ , pak

$$M = \int_{\alpha}^{\beta} s(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt, \quad S_x = \int_{\alpha}^{\beta} s(t)\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt,$$

$$S_y = \int_{\alpha}^{\beta} s(t)\varphi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt.$$

Souřadnice těžiště se vypočítají jako v předcházejím případě.

**Příklad 8.6.1.** Určete těžiště oblouku asteroidy v prvním kvadrantu:  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ ,  $s(t) = 1$ ,  $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  (viz Obr. 8.5.14).




**Řešení:** V příkladu 8.5.11 jsme počítali délku asteroidy  $L$ . Protože je  $s(x) = 1$ , je délka  $L$  asteroidy rovna její hmotnosti, ale v našem případě uvažujeme pouze čtvrtinu asteroidy, tedy  $M = \frac{1}{4}L = \frac{3}{2}a$ .

$$\begin{aligned} S_x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \cdot 3a \sin t \cos t dt = 3a^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt = 3a^2 \cdot \int_0^1 u^4 du = \\ &= 3a^2 \cdot \left[ \frac{u^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3a^2}{5} \\ S_y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos^3 t \cdot 3a \cos t \sin t dt = 3a^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin t dt = -3a^2 \cdot \int_1^0 u^4 du = \\ &= 3a^2 \cdot \left[ \frac{u^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3a^2}{5} \end{aligned}$$

Souřadnice těžiště

$$T = \left[ \frac{3a^2}{\frac{5}{2}}, \frac{3a^2}{\frac{5}{2}} \right] = \left[ \frac{2a}{5}, \frac{2a}{5} \right].$$

...  ...

### $\beta$ ) Statický moment a těžiště rovinného obrazce.

Nechť je dán rovinný obrazec omezený osou  $x$ , přímkami  $x = a$ ,  $x = b$  a grafem spojitě a nezáporné funkce  $y = f(x)$ . Nechť je plošná hustota dána funkcí  $s(x)$ , spojitou na  $\langle a, b \rangle$ . Pak celková hmota a statické momenty vzhledem k souřadným osám jsou dány vzorci

$$M = \int_a^b s(x)f(x) dx, \quad S_x = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b s(x)f^2(x) dx, \quad S_y = \int_a^b s(x)xf(x) dx.$$

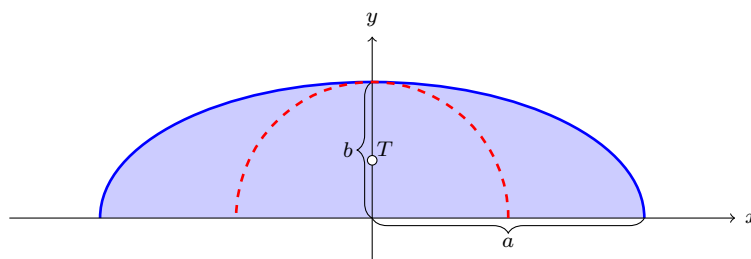
Všimněte si, že má-li plošná jednotka hmotu rovnu jedné (stručně říkáme, že uvažovaný obrazec má jednotkovou plošnou hustotu), pak celková hmota  $M$  daného křivočarého lichoběžníka se číselně rovná jeho obsahu

$$M = P = \int_a^b s(x)f(x) dx.$$



**Příklad 8.6.2.** Vypočtěte polohu těžiště plochy omezené půlelipsou a osou  $x$ , Obr. 8.6.2. Rovnice elipsy je  $f(x) = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ . Uvažujme  $s(x) = 1$  pro všechna  $x \in \langle -a, a \rangle$ .

**Řešení:**



Obr. 8.6.2

$$M = \int_{-a}^{+a} f(x) dx = \frac{\pi}{2} ab \quad (\text{subst. } x = a \cos t - 2. \text{ substituční metoda})$$

$$S_y = \frac{b}{a} \cdot \int_{-a}^{+a} x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left| \begin{array}{l} a^2 - x^2 = t^2 \\ -2x dx = 2t dt \end{array} \right| = - \int_0^0 t^2 dt = 0$$

$$S_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) dx = \frac{b^2}{2a^2} \cdot \left[ a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{+a} = \frac{2}{3} ab^2.$$

Souřadnice těžiště  $T[x_t, y_t]$ :

$$x_t = \frac{S_y}{M} = 0, \quad y_t = \frac{S_x}{M} = \frac{\frac{2}{3} ab^2}{\frac{\pi}{2} ab} = \frac{4b}{3\pi}.$$

Poloha těžiště nezávisí na délce poloosy  $a$ . Tedy půlkruh o poloměru  $b$  má těžiště ve stejné výšce jako půlelipsa.



### c) Moment setrvačnosti rotačního tělesa vzhledem k ose rotace.

Moment setrvačnosti je fyzikální veličina, která vyjadřuje míru setrvačnosti tělesa při otáčivém pohybu. Její velikost závisí na rozložení hmoty v tělese vzhledem k ose otáčení. Moment setrvačnosti soustavy hmotných bodů je dán součtem momentů setrvačnosti jednotlivých bodů.

Uvažujme rotační těleso (jednotkové hustoty) vzniklé rotací kolem osy  $x$  křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora grafem spojitě nezáporné funkce  $y = f(x)$  v mezích  $x = a$ ,  $x = b$  (Obr. 8.5.15 a Prezentace 8.5.2). Moment setrvačnosti  $I_x$  daného rotačního tělesa vzhledem k ose  $x$  lze určit ze vzorce

$$I_x = \frac{\pi}{2} \cdot \int_a^b f^4(x) dx.$$

## Index

### A

aditivnost určitého integrálu, 212

### D

dělení intervalu, 205

délka křivky v rovině, 227

### F

formule Leibniz-Newtonova, 209

### H

hodnota střední, integrálního počtu, 214

### I

integrace v Newtonově smyslu, 209

integrál Riemannův, 206

### N

norma dělení, 205

### M

metoda, per partes v určitém integrálu, 215

- substituční v určitém integrálu, 216

### O

objem rotačního tělesa, 230

obsah, obrazce, 218

- pláště rotačního tělesa, 232

### P

podgraf funkce, 218

### S

součet, dolní, 206

- horní, 206

- integrální, 207

### Z

zjemnění dělení, 206