9 Nevlastní integrál

OBSAH
INDEX
CVIČENÍ

Motivace

V našich dosavadních úvahách o konstrukci a vlastnostech integrálu funkce $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$, resp. (a, b), jsme vycházeli ze dvou základních předpokladů:

1. interval (a, b) je ohraničený, tj. a, $b \in \mathbb{R}$,
2. funkce $f(x)$ je ohraničená na (a, b).

V aplikacích matematiky jsme velmi často postaveni před úkol integrovat funkce i v případech, kdy některý z těchto předpokladů není splněn. Mluvíme o tzv. **nevlastních integrálech**. S jistými aplikacemi nevlastního integrálu se setkáme např. v matematice, dále v ekonomii, ale především ve fyzice.

Studijní cíle

1. Umět rozšířit pojem určitého integrálu na případy, kdy integrační interval není ohraničený, nebo integrovaná funkce není omezená v okolí některých bodů integračního intervalu.
2. Být schopen rozhodnout, zda integrál je nevlastní nebo ne, a jakého je typu.
3. Pochopit pojem konvergence nevlastního integrálu.

9.1 Nevlastní integrál v neomezeném intervalu

nevlastní integrál vlivem intervalu

Definice 9.1.1.

Nechť je funkce $f(x)$ definována v $\langle a, \infty)$ a nechť je integrace schopna v $\langle a, t\rangle$ pro každé $t > a$, $t \in \mathbb{R}$. Nechť existuje vlastní limita

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pak tuto limitu nazýváme **nevlastním integrálem funkce** $f(x)$ **od** a **do** $+\infty$ (nevlastní integrál vlivem intervalu) a označujeme ji $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. Říkáme také, že integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje nebo konverguje, v opačném případě neexistuje nebo diverguje.

Poznámka 9.1.1. Analogicky definujeme $\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $a \in \mathbb{R}$. Je-li $f(x)$ definovaná na $(-\infty, \infty)$ a je integrabilní na každém ohraničeném intervalu, říkáme, že nevlastní integrál $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když pro nějaké (a tedy každé) $a \in \mathbb{R}$ konvergují oba nevlastní integrály $\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. V tomto případě klademe

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 9.1.1. Vypočtěte $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x$, $k > 0$.

Řešení:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{\mathrm{e}^{-kx}}{k}\right]_0^t = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{\mathrm{e}^{-kt}}{k}\right) = \frac{1}{k}.$$

Zadaný integrál konverguje (existuje).

Příklad 9.1.2. Vyšetřeme konvergenci integrálu $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Funkce $\frac{1}{1+x^2}$ je spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$ a má tedy v tomto intervalu primitivní funkci, např. $F(x) = \operatorname{arctg} x$ a existují konečné limity

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Zadaný integrál je tedy konvergentní a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\operatorname{arctg} x\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Příklad 9.1.3. Vyšetřeme konvergenci integrálu $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left[\ln|x|\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln 1) = \infty.$$

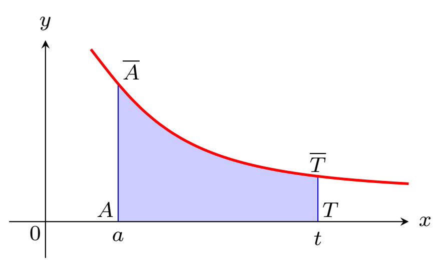
Z definice 9.1.1 plyne: pokud je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a, \infty)$, pak je integrovatelná v tomto intervalu právě tehdy, existuje-li konečná limita

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tento důsledek umožnuje jednoduchou geometrickou interpretaci integrálů s nekonečnou horní mezí. Je-li funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a, \infty)$, pak pro $t > a$ vyjadřuje funkce

$$S(t) = \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

obsah proměnného křivočarého lichoběžníka $AT\overline{T}\overline{A}$ (Obr. 9.1.1).



Obr. 9.1.1

Existuje-li konečná limita

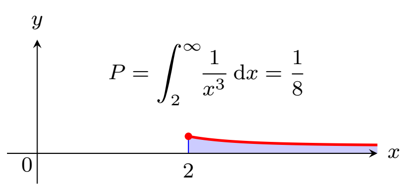
$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} S(t) = \int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pak tuto limitu můžeme interpretovat jako **obsah neomezeného obrazce ohraničeného křivkou** $y = f(x)$**, osou** x **a přímkou** $x = a$.

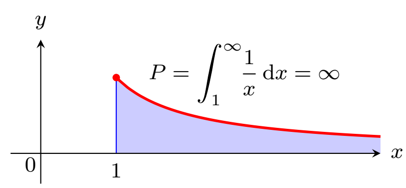
Diverguje-li $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, řekneme, že tento **obrazec má nekonečný obsah**. Podobný je pak i geometrický význam integrálů

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Například obsah P obrazce z Obr. 9.1.2, ohraničeného grafem funkce $f(x) = \frac{1}{x^3}$, osou x a přímkou $x = 2$, je $P = \frac{1}{8}$, neboť $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}$. Obsah podobného obrazce na Obr. 9.1.3, ohraničeného grafem funkce $f(x) = \frac{1}{x}$, osou x a přímkou $x = 1$, je nekonečný (srov. příklad 9.1.3).



Obr. 9.1.2



Obr. 9.1.3

V následujícím příkladě vyšetříme konvergenci důležitého integrálu.

Příklad 9.1.4. Vyšetřeme, pro která p je konvergentní integrál $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$, je-li $a > 0$.

Řešení: Funkce $\frac{1}{x^p}$ je v intervalu $\langle a, \infty)$ spojitá, a tedy má primitivní funkci $F(x)$, např.

$$F(x) = \frac{1}{(1-p)x^{p-1}} \quad \text{pro} \quad p \neq 1, \quad \text{a} \quad F(x) = \ln x \quad \text{pro} \quad p = 1.$$

Odtud je vidět, že konečná limita $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ existuje právě tehdy, je-li $p > 1$, protože pak

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(1-p)x^{p-1}} = 0.$$

Je-li $p < 1$, pak

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(1-p)x^{p-1}} = +\infty,$$

pro $p = 1$ je

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty.$$

Tím je dokázáno, že

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

je konvergentní právě tehdy, když $p > 1$.

Často není možné vyšetřením limity primitivní funkce v bodě $+\infty$, popř. $-\infty$ přímo rozhodnout, zda nevlastní integrál s nekonečnými mezemi konverguje nebo diverguje. V takových případech umožňuje zjistit konvergenci nevlastního integrálu např. tato věta:

Věta 9.1.1 (Srovnávací kritérium)**.**
Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v intervalu $\langle a, \infty)$ a platí-li v tomto intervalu pro všechna x: $0 \le f(x) \le g(x)$, pak z konvergence integrálu $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$ plyne konvergence integrálu $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$. Diverguje-li integrál z funkce f, diverguje i integrál z funkce g.

Další kritéria konvergence nevlastního integrálu naleznete např. v [16].

Příklad 9.1.5. Vyšetřeme konvergenci integrálu $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^4+4}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Funkce $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^4+4}}$ je spojitá a nezáporná v intervalu $\langle 2, \infty)$. Z nerovnosti $x\sqrt{x^4+4} > x\sqrt{x^4}$ plyne nerovnost

$$\frac{1}{x\sqrt{x^4+4}} < \frac{1}{x^3}$$

pro všechna x z intervalu $\langle 2, \infty)$. Protože integrál $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$ je konvergentní (jak plyne z příkladu 9.1.4), je konvergentní i zadaný integrál.

9.2 Nevlastní integrál neohraničené funkce na ohraničeném intervalu

singulární bod funkce

Definice 9.2.1.

Nechť a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, nechť $f(x)$ je funkce definovaná na intervalu $\langle a, b)$. Říkáme, že b je singulární bod funkce $f(x)$, právě když $f(x)$ není ohraničená na intervalu $\langle a, b)$, avšak pro každé $\beta \in \mathbb{R}$, $a < \beta < b$ je $f(x)$ integrace schopna na intervalu $\langle a, \beta\rangle$.

nevlastní integrál vlivem funkce

Definice 9.2.2.

Nechť je funkce $f(x)$ definována v $\langle a, b)$, kde b je jejím singulárním bodem. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{t \to b-} \int_a^t f(x) \, \mathrm{d}x,$$

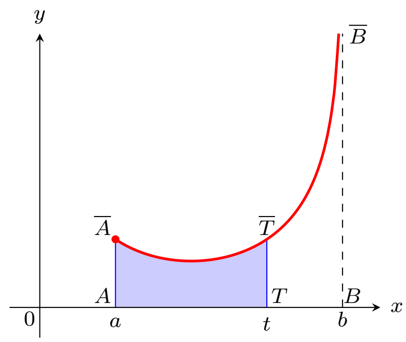
nazýváme tuto limitu **nevlastním integrálem funkce** $f(x)$ **od** a **do** b (nevlastní integrál vlivem funkce) a označujeme ji $\displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$.

Říkáme také, že integrál $\displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ existuje nebo konverguje, v opačném případě neexistuje nebo diverguje.

Poznámka 9.2.1. Analogicky definujeme singulární bod a pro funkci $f(x)$, definovanou na intervalu $(a, b\rangle$ a konvergenci nebo divergenci nevlastního integrálu $\displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$, je-li a singulárním bodem funkce $f(x)$. Je-li funkce spojitá v (a, b) a neohraničená v okolí bodu a i v okolí bodu b, lze snadno ukázat, že je integrovatelná v $\langle a, b\rangle$ právě tehdy, je-li integrovatelná i v intervalu $\langle a, c\rangle$ i v intervalu $\langle c, b\rangle$, kde c je některý (libovolně zvolený) bod z intervalu (a, b). Obecně lze uvažovat nevlastní integrál $\displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$, kde oba body a, b jsou singulární a uvnitř intervalu (a, b) leží konečná množina

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n; \quad a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b\}$$

dalších singulárních bodů funkce $f(x)$. Integrál $\displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ je konvergentní



Obr. 9.2.1

právě když, jsou-li konvergentní všechny integrály

$$\int_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \dots, \int_{x_n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Přitom platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \dots + \int_{x_n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nevlastní integrál **spojité a nezáporné funkce** v intervalu $\langle a, b)$ má jednoduchý geometrický význam: Integrál s proměnnou horní mezí

$$S(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x, \quad t \in \langle a, b)$$

je roven obsahu proměnného křivočarého lichoběžníka $AT\overline{TA}$ (Obr. 9.2.1).

Existuje-li nevlastní integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

je podle definice 9.2.2 roven limitě

$$\lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x,$$

tj. limitě $S(t)$ pro $t \to b-$. Tuto limitu můžeme interpretovat jako **obsah neomezeného obrazce** $AB\overline{BA}$. Je-li

$$\lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty,$$

řekneme, že obrazec $AB\overline{BA}$ má nekonečný obsah.

Příklad 9.2.1. Vyšetřeme konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 1-} \int_0^t \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 1-} \bigl(-\ln(1-t) + \ln 1\bigr) = +\infty.$$

Integrál diverguje.

Příklad 9.2.2. Vyšetřeme konvergenci integrálu $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Singulární body integrandu jsou obě integrační meze. Využijeme poznámku 9.2.1.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to -1+} \int_t^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to 1-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \\ &= \lim_{t\to -1+} \bigl[\arcsin x\bigr]_t^0 + \lim_{t\to 1-} \bigl[\arcsin x\bigr]_0^t = \\ &= -\lim_{t\to -1+} \arcsin t + \lim_{t\to 1-} \arcsin t = -\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) + \tfrac{\pi}{2} = \pi.\end{aligned}$$

Integrál konverguje.

9.3 Aplikace nevlastního integrálu

V matematice se nevlastní integrály využívají např. při Laplaceově transformaci pro řešení diferenciálních rovnic. Pro komplexní funkci f reálné proměnné t ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) a komplexní proměnnou p nevlastní integrál

$$\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

nazýváme Laplaceův integrál funkce f.

Ve II. ročníku v předmětu Diferenciální rovnice je část teorie věnována i nekonečným číselným řadám $\sum_{n=1}^\infty a_n$, kde $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Jedno z kritérií pro konvergenci těchto řad využívá nevlastní integrál $\int_1^\infty f(n)\mathrm{d}n$, kde platí $f(n) = a_n$.

Mezi speciální funkce se řadí tzv. Eulerovy integrály, což je souhrnný název pro funkce gama (Γ) a beta (B). Pro x, y, $z > 0$ definujeme (obecně jsou tyto funkce definovány pro x, y, $z \in \mathbb{C}$):

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, \qquad B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t.$$

Uvědomme si, že funkce beta je nevlastním integrálem, pokud $x \in (0,1)$ nebo $y \in (0,1)$. Funkce gama i beta nacházejí velké uplatnění v matematice i statistice.

Aplikace nevlastních integrálů lze nalézt taky např. v ekonomii, i když tam je jejich význam spíše teoretický.

Příklad 9.3.1. Vypočtěme celkový příjem vlastníků (a jejich potomků) za období $\langle 0, \infty)$, je-li výška renty dána formulí $f(t) = 10000 \cdot \mathrm{e}^{-0.01t}$ Kč, kde symbolem t označujeme roky.

Řešení: Celková výše příjmu za období $\langle T_1, T_2 \rangle$ při hustotě příjmu $f(t)$ je dána vztahem

$$TR(T_1, T_2) = \int_{T_1}^{T_2} f(t)\mathrm{d}t.$$

V našem případě je příjem časově neomezený (přechází na potomky vlastníků). Počítáme tedy nevlastní integrál

$$\begin{aligned} TR(0,\infty) &= \int_0^\infty 10000 \cdot \mathrm{e}^{-0.01t}\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} \int_0^x 10000 \cdot \mathrm{e}^{-0.01t}\mathrm{d}t = \\ &= \lim_{x\to\infty} \left[10000 \frac{\mathrm{e}^{-0.01t}}{-0.01} \right]_0^x = \lim_{x\to\infty} 10000 \left(\frac{\mathrm{e}^{-0.01x}}{-0.01} - \frac{1}{-0.01} \right) = \\ &= \lim_{x\to\infty} 1000000 \left(1 - \mathrm{e}^{-0.01x} \right) = 1000000\,\text{Kč}. \end{aligned}$$

Majitel pozemku a jeho potomci získají 1000000 Kč.

Spoustu aplikací nevlastního integrálu nalezneme ve fyzice. Uvedeme jednu z nich. Energie, E, potřebná k oddělení dvou částic z původní vzdálenosti a do vzdálenosti b je dána integrálem $E = \int_a^b \frac{kq_1q_2}{r^2}\mathrm{d}r$, kde q_1 a q_2 jsou velikosti nábojů a k je konstanta. Jestliže q_1 a q_2 jsou v coulombech, a a b jsou v metrech a E v joulech, hodnota konstanty k je $9 \cdot 10^9$.

Příklad 9.3.2. Atom vodíku se skládá z protonu a elektronu s opačnými náboji o velikosti $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ coulombů. Určete energii potřebnou k rozbití atomu vodíku (tzn. přesunout elektron ze své orbity do nekonečné vzdálenosti od protonu). Předpokládejme, že počáteční vzdálenost protonu a elektronu je $R = 5{,}3 \cdot 10^{-11}$ metrů.

Řešení: Protože se pohybujeme z počáteční vzdálenosti R do nekonečné vzdálenosti ∞, je energie dána nevlastním integrálem

$$\begin{aligned} E &= \int_R^\infty k\frac{q_1q_2}{r^2}\mathrm{d}r = kq_1q_2 \cdot \lim_{b\to\infty} \int_R^b \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \\ &= kq_1q_2 \cdot \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^b = kq_1q_2 \cdot \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{R} \right) = \frac{kq_1q_2}{R}. \end{aligned}$$

Dosazením numerických hodnot dostaneme

$$E = \frac{(9 \cdot 10^9) \cdot \left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\right)^2}{5{,}3 \cdot 10^{-11}} \approx 4{,}35 \cdot 10^{-18} \text{ joulů}.$$

Shrnutí

V této kapitole jsme rozšířili teorii Riemannova určitého integrálu, který je definován pro funkce spojité na uzavřeném intervalu (tedy funkce je omezená), na případy, kdy integrační interval není ohraničený, nebo integrovaná funkce není omezená v okolí některých bodů integračního intervalu. Mluvíme pak o konvergenci nebo divergenci nevlastních integrálů. Celá teorie je ale rozsáhlejší, než jsme uvedli v této kapitole. Některých nevlastním integrálům lze přiřadit hodnoty, i když tyto integrály neexistují ve smyslu definic 9.1.1, 9.2.2. Viz např. [24], kde se dozvíte o integraci ve smyslu hlavní hodnoty. Pro nás je podstatné, abychom dokázali na základě definic uvedených v této ale i předchozí kapitole rozhodnout, zda daný určitý integrál je nevlastní nebo není, pochopili princip konvergence nevlastních integrálů a na jednoduchých příkladech ji demonstrovali.

Klíčová slova

nevlastní integrál vlivem intervalu, singulární bod funkce, nevlastní integrál vlivem funkce

Index