Soustavy lineárních rovnic

Definice: Soustavou m **lineárních rovnic o** n **neznámých** rozumíme soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + \ a_{12}\,x_2 + \ldots + \ a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + \ a_{22}\,x_2 + \ldots + \ a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n &= b_m \end{aligned}$$

kde $b_i \in \mathbb{R}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pro všechna $i \in \{1,\ldots,m\}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$.

a_{ij} nazýváme **koeficienty**, b_i **pravými stranami soustavy** a x_j **proměnnými**.

Pokud jsou všechna b_i nulová, mluvíme o **homogenní soustavě**. Soustava, která není homogenní, se nazývá **nehomogenní**

Matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme **maticí soustavy** a matici

$$\mathbf{A}_r = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

nazýváme **rozšířenou maticí soustavy**.

Příklad:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 &= \ \ 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= \ \ 4 \\ 2x_1 \qquad\quad - 3x_3 &= \ \ 3 \\ 2x_1 - \ \ x_2 - 3x_3 &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Jde o nehomogenní soustavu rovnic.

Matice soustavy:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Rozšířená matice soustavy:

$$\mathbf{A}_r = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

Definice: **Řešením soustavy lineárních rovnic** (v oboru reálných čísel) rozumíme každou uspořádanou n-tici reálných čísel $z_1, z_2, \ldots, z_n$ takovou, že jejich dosazení za proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vede k identickým rovnostem.

Definice: Dvě soustavy lineárních rovnic, které mají všechna řešení totožná, se nazývají **ekvivalentní**. Úpravy, neměnící řešení u dané soustavy, se nazývají **ekvivalentní úpravy**.

Poznámka: Snadno lze ověřit, že rozšířené matice ekvivalentních soustav lineárních rovnic jsou ekvivalentní.

Frobeniova věta: Každá soustava m lineárních rovnic o n neznámých (s maticí soustavy $\mathbf{A}$ a s rozšířenou maticí soustavy $\mathbf{A}_r$)

a) má řešení, právě když $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_r)$,

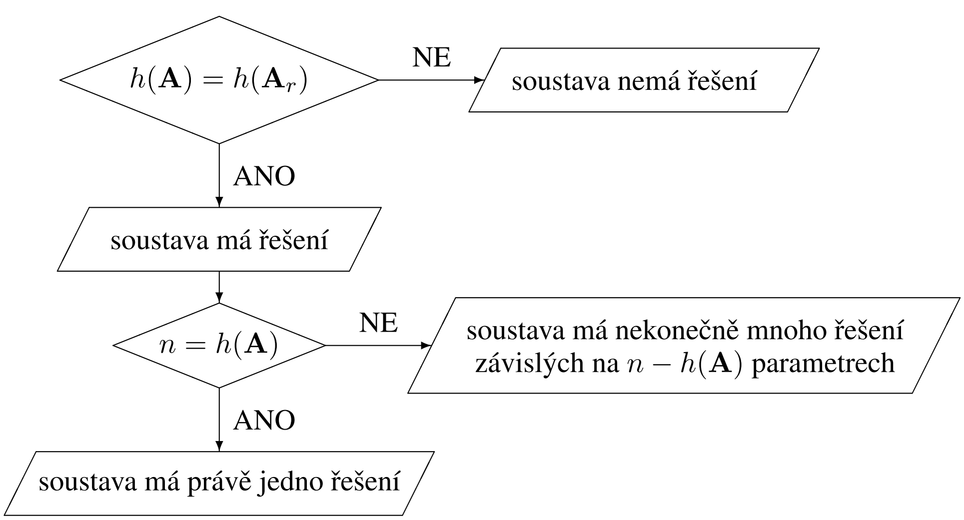
b) má v případě $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_r)$ řešení závislá na $n - h(\mathbf{A})$ parametrech.

Důsledek 1: Jestliže $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_r) = n$, pak má daná soustava právě jedno řešení.

Důsledek 2: Každá homogenní soustava lineárních rovnic má řešení (neboť $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_r)$).

Postup řešení soustav lineárních rovnic (Gaussova eliminační metoda)

1. Napíšeme rozšířenou matici soustavy.
2. Pomocí ekvivalentních úprav tuto matici převedeme na horní stupňovitý tvar.
3. Na základě Frobeniovy věty provedeme diskuzi podle schématu:



4. Ze soustavy rovnic, odpovídající poslední matici (tj. matici v horním stupňovitém tvaru), dopočítáme řešení.

Příklad:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Příklad:
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Příklad:
$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}-x_2} - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 8x_4 &= 5 \\ x_1 - x_2 - 7x_3 + 9x_4 &= 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 13x_4 &= 9 \end{aligned}$$

Cramerovo pravidlo

Definice: Čtvercovou matici A typu (n, n) nazveme **regulární**, právě když $h(A) = n$.

Věta: Determinant každé regulární matice je nenulový.

Věta (Cramerovo pravidlo): Nechť je dána soustava n lineárních rovnic o n neznámých, jejíž matice soustavy A je regulární. Pak má tato soustava právě jedno řešení $x_1, x_2, \ldots, x_n$, přičemž

$$x_i = \frac{det\,\mathbf{A_i}}{det\,\mathbf{A}} \quad (\text{pro } i = 1, \ldots, n),$$

kde A_i je matice vzniklá z matice A nahrazením i-tého sloupce sloupcem pravých stran dané soustavy.

Příklad:
$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}-x_2} + x_3 &= 1 \\ - x_2 + 3x_3 &= -3 \\ x_1 \phantom{{}-x_2} + 4x_3 &= -3 \end{aligned}$$